

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 15 - Abgabe bis Freitag, 07.02.2014, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 14 ergeben.

Aufgabe 15.1 (29 Punkte)

Berechnen Sie

- (a) $\int 2 - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$
- (b) $\int \frac{x^6 - 4x^3 + x}{3x^3} \, dx$
- (c) $\int \frac{(1 + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$
- (d) $\int \ln^2(x) \, dx$ mit partieller Integration (*Hinweis: Es gilt $\int \ln(x) \, dx = x(\ln(x) - 1) + c$, $c \in \mathbb{R}$.*)
- (e) $\int \sin(2x) \cos(3x) \, dx$ mit partieller Integration
- (f) $\int \sin^3(x) \cos(x) \, dx$ durch geeignete Substitution
- (g) $\int_0^1 (x+2)\sqrt{x^2+4x+1} \, dx$ durch geeignete Substitution
- (h) $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx$ durch Wahl einer geeigneten Substitution und anschließender Partialbruchzerlegung
- (i) $\int \frac{2x^2 - 6x + 11}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \, dx$ durch Partialbruchzerlegung

Aufgabe 15.2 (9 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Funktion $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ und die x -Achse vollständig begrenzt wird.
- (b) Bestimmen Sie eine zur x -Achse parallele Gerade $g(x)$, die mit der Funktion $f(x) = x^2$ eine Fläche mit dem Flächeninhalt 4 einschließt.

(Aufgaben 15.3 - 15.19 - siehe Seite 2ff.)

Aufgabe 15.3 (27 Punkte)

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung $3y' = -2x^2y - 4xy$ mit $y > 0$ und dem Anfangswert $y(1) = 2$.
- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung $3y' = -2x^2y' - 4xy$ mit $y > 0$ und dem Anfangswert $y(1) = 2$.
- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung $2y' + 3xy' = \frac{(2+3x)^5}{y}$, $y > 0$, mit dem Anfangswert $y(0) = 1$.
- (d) Lösen Sie die Differentialgleichung $(x^3 + 3x^2 + 7x)y' = (8x^2 + 15x + 14)y$, $x > 0$, mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.
- (e) In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80 % pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich aber etwa 7 Gramm neuer „Abfall“ pro Quadratzentimeter und Jahr an. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Menge $u(t)$ des Abfalls auf einem Quadratzentimeter auf und weisen Sie nach, dass sich diese Menge im Laufe der Zeit stabilisiert.

(Hinweis zu (c): Nach Trennung der Variablen auf einer Seite bei der Integration die Substitutionsregel verwenden.; Hinweis zu (d): Nach Trennung der Variablen auf einer Seite bei der Integration Partialbruchzerlegung durchführen.)

Aufgabe 15.4 (10 Punkte)

Berechnen Sie die erste Ableitung von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2 \sin(x) + \sqrt{x^4 + 1} + \frac{\cos(x)}{3x^2 + 1}$
- (b) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^{x^x}$.
- (c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{(2x^2 - 4x - 16)}$
- (d) $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\cos(\pi \exp(x))}{\ln(x)}$

Aufgabe 15.5 (7 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} \frac{164}{25}(x+1) & \text{für } x < 0 \\ (x-2)^2 - \frac{12}{25}(x-2) + \frac{8}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4x}{x^2+1} & \text{für } x > 2 \end{cases}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
- (b) Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ differenzierbar? Geben Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 15.6 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Stelle x_0 stetig ist:

- (a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 1 \\ ax^2 + 3 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$
- (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x+1} & \text{für } x \in (-1, 0] \\ \frac{\sin(\frac{x}{2})}{2x} & \text{für } x \in (0, 4] \end{cases}$, $x_0 = 0$

Aufgabe 15.7 (7 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := e^{x^2-1} - x^2 + 3$ definiert.

- (a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion f . Entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Minima oder Maxima handelt und berechnen Sie die Funktionswerte in den Extremstellen.
- (c) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$.

Aufgabe 15.8 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + ax$, $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie Lage und Art der lokalen Extremwerte von f in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestimmen Sie für $a = -1$ die Gleichungen der Tangenten an den Nullstellen.

Aufgabe 15.9 (8 Punkte)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, WS 2012/13)

Gegeben sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \ln(h(x))$, wobei die Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch $h(x) := 4 - |2x + 6|$.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie die Nullstellen von f . Ist die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar? Geben Sie die erste Ableitung von f in allen Punkten aus D an, in denen f differenzierbar ist. Bestimmen Sie außerdem durch Diskussion des Monotonieverhaltens von f die Koordinaten und die Art aller lokalen Extremstellen von f .

Aufgabe 15.10 (13 Punkte)

- (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Es seien $a \neq b$ und $c \neq d$ reelle Zahlen. Dann gilt stets $a + c \neq b + d$.
- (b) Beweisen Sie, dass $|a - b| \geq ||a| - |b||$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a - b| = \min(a, b) - \max(a, b)$
- (d) Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- (e) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (f) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $a_n := 5^{2n} - 3^{2n}$ durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 15.11 (10 Punkte)

Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 9| \leq 8x \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2x-4} < 2 \right\}$$

(Aufgaben 15.12 - 15.19 - siehe Seiten 4 und 5)

Aufgabe 15.12 (12 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- mit

$$a_n := \left(n^2 \left(\sqrt{n^4 + 5} - \sqrt{n^2 - 4} \sqrt{n^2 + 4} \right) \right) \cdot \frac{(n^2 - 3)^2}{2n^4 + 7n - 12} + \frac{7n^3}{22 - 12n^3}$$

- (b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- mit
- $a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$
- .

- (c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- mit
- $a_n := \frac{(-1)^n n^2 + n}{4n^2 - 8n + 4} + \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$
- .

(Hinweis zu (b): Es gilt $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 15.13 (10 Punkte)

Berechnen Sie:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 7^{n-1}}{4^{2n}}$

(b) $\sum_{n=0}^{10} 2^n$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1} - 3}{8^k}$

(d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n}$

Aufgabe 15.14 (11 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + n^3}{4 - n + n^2 - 3n^3} \right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 3(-1)^n)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n} - \sqrt{n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{2n-1}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot e^{-n^2}$

(Aufgaben 15.15 - 15.19 - siehe Seite 5)

Aufgabe 15.15 (11 Punkte)

- (a) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3 \sin(x)}$ nach der Regel von l'Hospital.
- (b) Gegeben seien die Funktionen $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (Sinus hyperbolicus) und $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (Kosinus hyperbolicus). Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Warum kann zur Berechnung die Regel von l'Hospital nicht verwendet werden?

Aufgabe 15.16 (8 Punkte)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, WS 2010/11)

Gegeben seien die reellwertigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: (-\pi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \\ \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) & , \quad x < 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos(x)-1}{x} & , \quad x > 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

- (a) Ist die Funktion f in $x = 1$ stetig und stetig differenzierbar?
- (b) Kann man die Konstante c in der Funktion g so wählen, dass g in $x = 0$ stetig ist?

Aufgabe 15.17 (6 Punkte)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, WS 2011/12)

Entwickeln Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5^{2x+1}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f ?

(Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Vermutung für die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von f auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion! Beweisen Sie insbesondere auch die erste Ableitung $f'(x)$.)

Aufgabe 15.18 (6 Punkte)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, WS 2010/11)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f ?

Aufgabe 15.19 (12 Punkte)

(Prüfungsaufgabe E-Technik, TU Dresden 2012)

Leiten Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion $g(x) := \ln(x^2 - 1) \cdot \sin(1 - x)$ her, und berechnen Sie die erste Ableitung von g . Berechnen Sie außerdem die Grenzwerte

$$\lim_{x \downarrow 1} g(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow -1} g(x).$$

(Hinweis/Zusatz: Für einen der Grenzwerte kann l'Hospital verwendet werden, bei dem anderen helfen geeignete Abschätzungen im Intervall $(-\sqrt{2}, -1)$. Begründen Sie, warum für einen der beiden Grenzwerte l'Hospital nicht angewendet werden kann.)