

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/14

Zwischenklausur vom 05. Dezember 2013

Name : _____
Matrikelnummer : _____
Übungsgruppe : _____

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	10	Σ	Note	Zusatzpkt. f. d. Prüfung
mögliche Punkte	10	6	7	10	13	4	50	-	7
erreichte Punkte									

Hinweise: In den Ankreuzfragen 1 bis 5 gibt es *genau eine* richtige Antwort. Kreuzen Sie in den Aufgaben 1 bis 5 jeweils die richtige Antwort an. Für falsche Antworten werden keine negativen Punkte vergeben. Zur Aufgabe 6 beachten Sie die Hinweise in der Aufgabenstellung. Bei den Aufgaben 7 bis 10 muss jede Lösung klar begründet und der Lösungsweg nachvollziehbar angegeben werden. Außer den Vorlesungs- und Übungsmitschriften und einer Formelsammlung sind keine Hilfsmittel erlaubt! Alle technischen Geräte sind abzuschalten und außer Reichweite zu legen. Bitte nicht mit roter Farbe schreiben! Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle bereit. **Bearbeitungszeit: 75 Minuten**

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ seien beschränkt und für alle $b \in B$ gelte $b \neq 0$. Was läßt sich über die Menge $C := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B \right\}$ aussagen?

- ☐ (a) Die Menge C ist beschränkt.
- ☐ (b) Die Menge C ist unbeschränkt.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Beschränktheit von C möglich.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{Q}$ eine nach unten beschränkte Menge. Welche Aussage folgt daraus?

- ☐ (a) M besitzt ein Minimum in $\mathbb{R}$.
- ☐ (b) M besitzt ein Minimum in $\mathbb{Q}$.
- ☐ (c) Das Infimum von M liegt in $\mathbb{R}$.
- ☐ (d) Das Infimum von M liegt in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Was folgt daraus für die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{a_n}{b_n}$?

- ☐ (a) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die Häufungspunkte -1 und 1 .
- ☐ (b) Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ hat $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte.
- ☐ (c) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat nur den Häufungspunkt 0 .
- ☐ (d) Eine Aussage über die Existenz von Häufungspunkten der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht möglich.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- ☐ (a) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ konvergiert.
- ☐ (b) Mit dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ divergiert.
- ☐ (c) Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ konvergiert.
- ☐ (d) Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+4} \cdot (-a_n)$ divergiert.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Zahl $a := 1 - 17i$. Welchen Imaginärteil hat $z := a^k \cdot \bar{a}^k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?

- ☐ (a) $\operatorname{Im}(z) = -289^k$
- ☐ (b) $\operatorname{Im}(z) = 289^k$
- ☐ (c) $\operatorname{Im}(z) = 0$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Geben Sie durch Ankreuzen an, welche Eigenschaften für die jeweilige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt. Gilt eine Eigenschaft nicht, dann lassen Sie das entsprechende Feld leer.

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	nach unten beschränkt	nach oben beschränkt	unbeschränkt	monoton fallend	monoton wachsend	nicht monoton	alternierend	konstant	Cauchy-Folge	divergent
$a_n = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}$										
$a_n = (-n)^{3n+444n^2}$										
$a_n = \frac{(-1)^{2n+4n^2}}{(n+1)^2 + (-1)^n}$										
$a_n = \frac{\cos(n\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{(-3)^n n^3 + 2n + 88}$										
$a_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{2} \cdot \frac{8n^2 + 2n}{n+2}$										
$a_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\sqrt{n}}}$										

Aufgabe 7 (7 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie - im Falle ihrer Existenz - Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{|2x-4|+6}{x+3} \geq 2x$.
- (b) Stellen Sie die komplexe Zahl $v := \frac{i}{1+2i} + \frac{3}{4i}$ in der Form $a+bi$ dar.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{4+2n-3n^2}{2n^2-2}\right) \cdot \left(\frac{2-3n}{n+3}\right)^2 + \frac{3n^3+(-1)^n n^2-1}{(-1)^n+2n-8n^3}$.
- (b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n n^7 + n^3 - 3(-1)^n}{3n^7 + n^5 - n^3 + 2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2-1}{2-n^2}$ konvergiert. (Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Vermutung für den Grenzwert auf.)

Aufgabe 9 (13 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^{n-1}}{4^{n-1}}$.
- (b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ auf Konvergenz.
- (c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{7^{n^2}}$ absolut konvergent?
- (d) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{3n^2+9}$ mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz.
- (e) Zeigen Sie durch Anwendung des Majorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n^2 - n - 1}{n^5 + n^4 - 2n^3 - n^2 + 2}$ konvergiert.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{für } x < -1 \\ -3ax^2 + 3bx + 3 + a + b & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 4ax^3 + 3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig?