Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Aufgaben für die Übungen vom 09. bis 11.10.2013

Aufgabe Ü1.1

Seien u, v und w drei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. U, V bzw. W seien die linearen Hüllen dieser Vektoren, also $U = \text{span}\{u\}$, $V = \text{span}\{v\}$ und $W = \text{span}\{w\}$. Es gilt:

☐ (a) $\text{span}\big(U \cup V \cup W\big) = \mathbb{R}^3$

☐ (b) $\text{span}\big((U \cap V) \cup W\big) = \mathbb{R}^3$

☐ (c) $\text{span}\big(U \cup (V \cap W)\big) = \mathbb{R}^3$

Aufgabe Ü1.2

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper ($n \in \mathbb{N}$) und $f : V \to V$ mit $f(x) = Ax$ sei eine lineare Abbildung, wobei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Die Abbildung f ist genau dann bijektiv, falls

☐ (a) der Zeilenraum von A die Dimension $n - 1$ hat.

☐ (b) A invertierbar ist.

☐ (c) $n > 1$ gilt und A symmetrisch ist.

☐ (d) keine der genannten Alternativen (a), (b) oder (c) zutrifft.

Aufgabe Ü1.3

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, und die Vektoren v_1, v_2 bilden eine Basis des Kerns $\ker(f)$. Für die Dimension des Bildes $\text{im}(f)$ gilt dann

☐ (a) $\dim(\text{im}(f)) = 2$

☐ (b) $\dim(\text{im}(f)) = 3$

☐ (c) $\dim(\text{im}(f)) = 4$

Aufgabe Ü1.4

(a) Weisen Sie nach, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1800 und 1275.

(c) Ermitteln Sie die multiplikative Inverse $[10]^{-1}$ zur Restklasse $[10]$ im Körper $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

(d) Berechnen Sie den Wert von $(3 + 5^4) \cdot (3 - 5^4) + 3^5$ im Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(e) Gegeben seien $f, g \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2x^9 + 2x^7 + 2x^6 + x^3 + x^2 + 2$ und $g(x) = x^3 + 2x + 2$. Bestimmen Sie Polynome $q, r \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ mit $f = q \cdot g + r$.

(f) Ist die durch $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit $f\big((a,b,c,d)^T\big) := (a-b)x^3 + (b-c)x^2 + dx + a$ definierte Abbildung eine lineare Abbildung?

(g) Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

lösbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ und geben Sie diese in der Form $\mathcal{L}(A, b) = x_p + \ker(A)$ an, wobei x_p eine beliebige, aber feste Lösung des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems ist.

Aufgabe Ü1.5

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(b) Berechnen Sie die Inverse B^{-1} von $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Aufgabe Ü1.6

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es seien $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$, $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ und $U + V = \operatorname{span}(U \cup V)$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U,

(b) sowie eine Basis von $U + V$.

(c) Ergänzen Sie die Basis von $U + V$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

(d) Geben Sie die Dimensionen von U, V, $U + V$ und $U \cap V$ an.

(e) Für welche Werte $s, t \in \mathbb{R}$ liegt der Vektor $w = \big(4\ ,\ -2\ ,\ s\ ,\ t - 29\ ,\ 2t - s\big)^T$ in $U + V$?

Verwenden Sie in (a), (b), (c) und (e) ausschließlich den Gauß-Algorithmus!
(*Hinweis: Zur Reduzierung des Rechenaufwandes führen Sie die Rechungen von (b) und (c) parallel durch.*)