

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Aufgaben für die Übungen vom 23. bis 25.10.2013

Aufgabe Ü3.1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine rekursiv definierte Folge mit $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := \frac{1}{5}(a_n^2 + 4)$.

- (a) Weisen Sie nach, dass die Folge konvergiert.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe Ü3.2

Bestimmen Sie für die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ einen kleinsten Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für die angegebenen $\varepsilon > 0$ jeweils $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt:

- (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$, $a = 3$, $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$
- (b) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$, $a = 3$, $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-9}, 10^{-16}$
- (c) $a_n = (3 + (-1)^n) \frac{1}{n^2}$, $a = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-9}, 10^{-16}$

Aufgabe Ü3.3

Stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf, und beweisen Sie die Konvergenz gegen diesen Grenzwert mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen.

- | | |
|------------------------------------|--|
| (a) $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$ | (e) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ |
| (b) $a_n = 2^{-n}$ | (f) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |
| (c) $a_n = \frac{2n^2+3n}{4n^2+1}$ | (g) $a_n = \frac{c}{n!}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig sei |
| (d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$ | (h) $a_n = \frac{1}{b_n}$, wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ gelte |

Aufgabe Ü3.4

Beweisen Sie mit der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen den angegebenen Wert $a \in \mathbb{R}$ konvergieren:

- (a) $a_n = \frac{3}{n+1}$, $a = 1$
- (b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$, $a = 0$
- (c) $a_n = (-1)^n n$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig.