

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Aufgaben für die Übungen vom 06. bis 08.11.2013

Aufgabe Ü5.1

Im Jahre 1904 stellte der schwedische Mathematiker Helge von Koch eine Kurve vor, die zur damaligen Zeit auch als Monsterkurve bezeichnet wurde. Die Konstruktion der Kurve beginnt mit einer einzigen Geraden der Länge x (Koch-Kurve nullter Ordnung). Diese Gerade wird in drei gleich lange Abschnitte unterteilt, das mittlere Segment wird durch zwei Geraden der Länge $\frac{x}{3}$ ersetzt. (Koch-Kurve erster Ordnung). Dieses Prinzip von Teilen und Ersetzen wird nun auf jedes der vier Geradensegmente angewendet, d.h. zur Konstruktion der Koch-Kurve zweiter Ordnung wird jede Gerade in der Koch-Kurve erster Ordnung durch vier Geraden der Länge $\frac{x}{9}$ ersetzt.

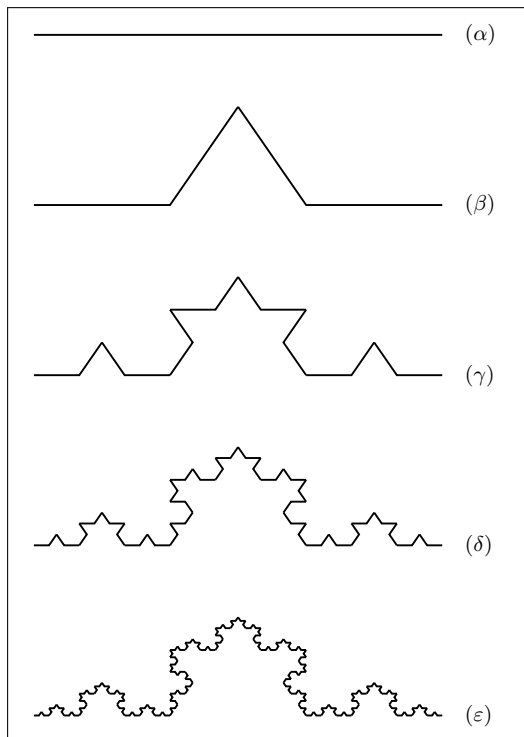


Abb. 1: Koch Kurve nullter (α), erster (β), zweiter (γ), dritter (δ) und vierter (ε) Ordnung.

Durch Ersatz jeder Gerade in der Koch-Kurve zweiter Ordnung durch vier Geraden der Länge $\frac{x}{27}$ entsteht die Koch-Kurve dritter Ordnung. Dieses Prinzip kann bis zu einer beliebigen Ordnung $n \in \mathbb{N}$ fortgesetzt werden. Setzt man drei Koch-Kurven geeignet aneinander, dann erhält man daraus die Kochsche Schneeflocke (Abb. 2).

- Bestimmen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ die Länge der Koch-Kurve n -ter Ordnung. Ist die Länge für $n \rightarrow \infty$ endlich?
- Bestimmen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke n -ter Ordnung. Ist der Flächeninhalt für $n \rightarrow \infty$ endlich?

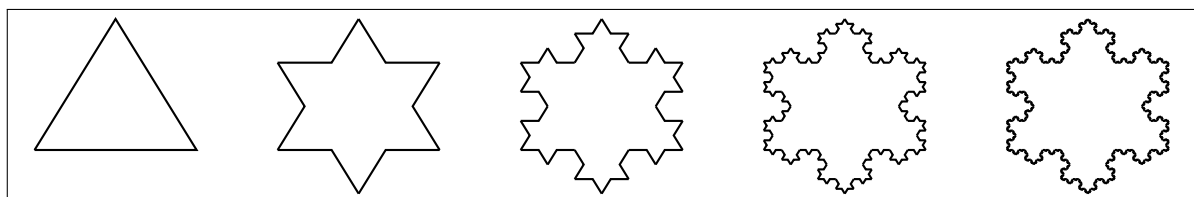


Abb. 2: Kochsche Schneeflocke nullter, erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung (v.l.n.r.).

Aufgabe Ü5.2

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n-1}}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{5^{n+1}}$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1} + 3^n}{7^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$(h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{2n+1}}{3^{2n}}$$

Aufgabe Ü5.3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n}{(n!)^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{3}}\right)^{n^2}$$

$$(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

(Hinweis zu (c): Zeigen Sie zunächst, dass $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ gilt!)