

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Aufgaben für die Übungen vom 20. bis 22.11.2013

Aufgabe Ü7.1

- (a) Ergänzen Sie in den grauen Feldern ein geeignetes Relationszeichen (mit Begründung). Geben Sie ggf. auch an, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen gelten.

(i) $\frac{n+2}{n(n+1)^2} \quad \blacksquare \quad \frac{1}{n+2}$

(ii) $\frac{1}{5n^2 - 3n + 298} \quad \blacksquare \quad \frac{1}{5n^2 + n - 3}$

(iii) $\frac{13n - 14}{10^n - 3n + \sqrt{n}} \quad \blacksquare \quad \frac{13n - 12}{5n^2 + 2^n + \sqrt{n}}$

(iv) $\frac{2n^3 - n^2 + n - 1}{5n^4 + n^2 - n + 1} \quad \blacksquare \quad \frac{2n^3 + (n-1)^2}{4n^4 + 2n^2 - n - 2}$

(v) $\frac{5n+8}{2n^2+n} - \frac{2n^2-1}{2n^3+1} \quad \blacksquare \quad \frac{3n+2}{4n^3-n} - \frac{2n^3+1}{2n^2+3}$

- (b) Schätzen Sie folgende Ausdrücke für $x \in [-1, 2]$ nach unten und nach oben ab:

(i) $(x-1)(x^2+1)$

(ii) $(x-1)(x^2+1) + x - 1$

(iii) $(x-1)(x^2+1) - 2x$

(iv) $\frac{(x-1)(x^2+1)}{x+2}$

(v) $\frac{(x-1)(x^2+1)}{2x-5}$

- (c) Weisen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz nach, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{2n^2 + n - 2}{n^3 + 4n^2 - 8n - 1}$$

konvergiert.

- (d) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

- (e) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{(-1)^n 2 + n} \right)^n$ konvergent?

(Aufgabe Ü7.2 - siehe Seite 2)

Aufgabe Ü7.2

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Zahl $z = \frac{2+3i}{1-3i}$

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

(i) $M_1 = \{1+2i, -1+i, -1, -2i\}$

(ii) $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{re}(z) + 2\operatorname{im}(z) = 2, |\operatorname{im}(z)| \leq 2\right\}$

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Gleichungen

(i) $-z^2 = 16$

(ii) $(1+i)z = 8$

erfüllen.

(d) Weisen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz nach, dass die komplexwertige Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n := \left(\frac{1+i}{3i} - \frac{1-i}{1+i} \right)^{2n}$$

gegen Null konvergiert.

(e) Zeigen Sie: Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $z_n = x_n + iy_n$ konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \operatorname{re}(z)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{im}(z)$.