

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Aufgaben für die Übungen vom 04. bis 06.12.2013

Aufgabe Ü9.1

- (a) Weisen Sie mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwertes nach, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ für die Funktionen $f(x) := x - \lceil x \rceil$ für alle $x_0 \in \mathbb{Z}$ nicht existiert.
- (b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1]$ die Abschätzung $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3}$ gilt. Weisen Sie unter Verwendung dieser Abschätzung mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit nach, dass die Funktion $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar ist mit dem Funktionswert $f(0) := 1$.
- (c) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f(x) := \frac{\sqrt{5+3x}-2}{3x+1}$ und untersuchen Sie, ob die Funktion auf ganz D stetig ist. Falls f in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.
- (d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f(x) := \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{16}{x} & \text{für } x > 4 \end{cases}$ und untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

Aufgabe Ü9.2

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Der Zwischenwertsatz besagt: Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$. Diese in der Vorlesung bewiesene Variante des Zwischenwertsatzes wird auch Nullstellensatz genannt. Daraus folgt die allgemeine Version des Zwischenwertsatzes: Gilt $f(a) < d < f(b)$ für $d \in \mathbb{R}$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = d$.

- (a) Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert.
- (b) Weisen Sie nach, dass die auf dem Intervall $[a, b] = [-2, 2]$ definierte Funktion $f(x) := \frac{x+2}{2x+5}$ alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und berechnen Sie alle Fixpunkte von f .
- (c) Geben Sie ein Beispiel für ein offenes Intervall (a, b) und eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ an, so dass f keinen Fixpunkt hat.

Aufgabe Ü9.3

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

- (a) $f(x) := \frac{1}{4}x^2$ ist im Intervall $[0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig.
- (b) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ist in $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.