

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Aufgaben für die Übungen vom 18. bis 20.12.2013

Aufgabe Ü11.1

Bestimmen Sie Art aller lokalen Extremstellen $\hat{x}$ von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

- (a) durch Lösung der Gleichung $f'(\hat{x}) = 0$ (notwendige Bedingung) und Überprüfung des Vorzeichens von $f''(\hat{x})$ (hinreichende Bedingung),
- (b) durch Diskussion des Monotonieverhaltens von f .

Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Methoden (a) und (b)? Kann Methode (a) für jede beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet werden, um die lokalen Extremwerte zu bestimmen?

Aufgabe Ü11.2

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und im offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion: Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. Überprüfen Sie den Mittelwertsatz, indem Sie für die folgenden Funktionen alle x_0 aus den angegebenen Intervallen $[a, b]$ bestimmen, für die $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$ gilt:

- (a) $f(x) = x^3 - 2x$ im Intervall $[0, 2]$
- (b) $f(x) = |x - 2|$ im Intervall $[-1, 4]$
- (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1, 3]$

Aufgabe Ü11.3

- (a) Zeigen Sie, dass die stetige Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und geben Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an.

- (b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + x^3 + x^2 + x + 17) \cdot e^{-2x}$ mit der Regel von l'Hospital.

- (c) Berechnen Sie $\lim_{x \downarrow 0} x^x$.

- (d) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x}$ existiert. Warum kann die Regel von l'Hospital hier nicht angewendet werden?

- (e) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$. Warum kann auch dieser Grenzwert nicht mit der Regel von l'Hospital berechnet werden?

Aufgabe Ü11.4

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f auf Umkehrbarkeit im angegebenen Intervall D . Falls die Funktion umkehrbar ist, dann berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle y_0 .

- (a) $f(x) = e^{5x^2-1}$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = e^4$
- (b) $f(x) = e^{5x^2-1}$, $D = (0, \infty)$, $y_0 = e^4$