

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Dienstag, 21.10.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H2.1 (6 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ seien zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\circ$ definiert durch

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{bzw.} \quad (a, b) \circ (c, d) := (ac - bd, ad + cb)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ ein Körper ist.

Aufgabe H2.2 (5 Punkte)

Seien $a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen mit $a_i \geq -1$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_i \cdot a_j \geq 0$ für alle $i, j = 1, 2, \dots, n$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Ungleichung erhält man für $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bzw. wie heißt diese Ungleichung?

Aufgabe H2.3 (7 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gilt: $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$.
- (b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
- (c) Aus $ab > 1$ und $a < 1$ folgt stets $b > 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
- (d) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\max(a, b) = -\min(-a, -b)$

Aufgabe H2.4 (24 Punkte)

Bestimmen Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen, falls diese existieren:

- (a) $M_1 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5x - x^2 \geq 0\right\}$
- (b) $M_2 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{1 + x^2} < \frac{1}{2}\right\}$
- (c) $M_3 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid -6x^2 + 13x < 6\right\}$
- (d) $M_4 := \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = 1 + x \cdot |x|, -1 < x \leq 2\right\}$
- (e) $M_5 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+3} < 2x\right\}$
- (f) $M_6 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid |1 - |2 - |x|| = 1\right\}$