Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Dienstag, 28.10.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H3.1 (17 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $\sup(A)$ für $A = \left\{2^{-n}n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$. Besitzt die Menge A ein Maximum?
(Hinweis: Untersuchen Sie die Monotonie der Folge $a_n = 2^{-n}n^2$.)

(b) Ermitteln Sie die größte untere Schranke S für $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$. Beweisen Sie, dass S tatsächlich das Infimum der Menge B ist. Hat B ein Minimum?

(c) Ermitteln Sie $\inf(C)$ und $\sup(C)$ der Menge $C = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2x+15}{x^2-9} \geq 1\right\}$. Besitzt C ein Minimum und ein Maximum?

(d) Sei $A \neq \emptyset$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\inf\left(\left\{-x \mid x \in A\right\}\right) = -\sup(A)$ gilt.

Aufgabe H3.2 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = \frac{1}{4}$ und $a_{n+1} = a_n^2 + a_1$ für $n \geq 1$ monoton und beschränkt ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe H3.3 (7 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Falls die Folge konvergiert, dann geben Sie ihren Grenzwert an.

(a) $a_n = \dfrac{n^2+3}{(n+1)^2}$

(b) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

(*Hinweis zu (a): Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, ab dem sich das Monotonieverhalten der Folge ändert.*)

Aufgabe H3.4 (3 Punkte)
Ist die folgende Aussage richtig? „Eine Folge ist genau dann eine Nullfolge, wenn ihre Glieder immer kleiner werden.“ Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H3.5 (5 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$-Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{4n^2-n} = \dfrac{3}{4}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{4n^2-n} \neq \dfrac{3}{2}$

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H3.6

Wenden Sie die binomischen Formeln an:

(a) $(-a+3b)^2$

(b) $(4a^2-3)(4a^2+3)-(3a-4)^2+(5a+1)^2$

(c) $(a+b+1)(a-1+b)$

(d) $\dfrac{a^2-10a+25}{a-5}$

Aufgabe H3.7

Berechnen Sie <u>*ohne*</u> Taschenrechner:

(a) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2}+\frac{1-\frac{3}{5}}{2}\right)$

(b) $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}}}}$

(c) $\dfrac{5}{4+\dfrac{3}{3-\dfrac{2}{2+\frac{1}{2}}}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

(e) $\displaystyle\prod_{n=1}^{5}\frac{n}{n+1}$

(f) $\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\sqrt[3]{\sqrt[6]{\sqrt[2]{3^{72}}}}$

Aufgabe H3.8

Vereinfachen Sie (z.B. durch Anwendung der Potenzgesetze, durch kürzen von Brüchen usw.):

(a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$

(b) $\dfrac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+2}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$

(c) $\dfrac{\left(6ab\right)^3\cdot\left(5a^2b\right)^4}{2^4\cdot 3ab^2\left(25a\sqrt{b}\right)^2}$