

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 04.11.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H4.1 (15 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls sie existieren:

(a) $a_n = \frac{(3n+1)^2 \cdot 7^n}{7^{n+1} \cdot (n^2+2)}$

(b) $a_n = \frac{8n^7 + (-1)^n n^6 - n^5 - (n^2+1)^2 + 2}{1 + n^2 - 2n^4 - (1 - (-1)^n)n^5 - 12n^6 - 17n^7}$

(c) $a_n = \frac{3 + \frac{1}{2^n}}{2 - \sqrt[n]{5}}$

(d) $a_1 = 1, \quad a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad n \geq 2$

(e) $a_n = \sqrt{4n^2 - n + 2} - \sqrt{3n^2 + n - 4}$

(f) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n+2}} - \sqrt{n+2}$

(Hinweis zu (d): Weisen Sie zunächst nach, dass $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.)

Aufgabe H4.2 (8 Punkte)

(a) Gegeben sei die konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$,

$$a_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, \quad a_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \quad a_4 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}, \quad \dots$$

Berechnen Sie den Grenzwert dieses Kettenbruchs.

(b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 = 2, \quad a_n = \frac{3}{4 - a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe H4.3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(Aufgabe H4.4 - siehe Seite 2)

Aufgabe H4.4 (4 Punkte)

Gegeben seien die konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + b_n) &= 9 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n - b_n) &= 8\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H4.5

Vereinfachen Sie:

- (a) $\sqrt{6x^2 - 6} \cdot \sqrt{\frac{3x - 3}{2x + 2}}$
- (b) $\frac{\sqrt{(a - b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}}$
- (c) $\sqrt{12x^2 - 12x} \cdot \sqrt{3x^2 - 3}$
- (d) $\frac{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^4}} : \frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[9]{a^7}}{\sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt{a}}$

Aufgabe H4.6

Stellen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen jeweils nach x bzw. n um:

- (a) $x^2 = n^3 + 1$
- (b) $x^2 < n^3 + 1$
- (c) $\sqrt{x + 2} = \sqrt[4]{n^3 + 1}$
- (d) $\sqrt{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{1 + \sqrt[3]{n^2}}$
- (e) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} - 3n$

Aufgabe H4.7

Formen Sie die folgenden Brüche so um, dass ihre Nenner ganzzahlig werden:

- (a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$
- (b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
- (c) $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}$
- (d) $\frac{2}{7 - \sqrt{15}}$
- (e) $\frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{6} + 3\sqrt{5}}$