

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Dienstag, 11.11.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H5.1 (22 Punkte)

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf die Existenz von Häufungspunkten, und geben Sie ggf. alle Häufungspunkte an.

(a) $a_n := \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$

(b) $a_n := \frac{2}{9}n + \frac{2}{3} \left\lfloor -\frac{n}{3} \right\rfloor + (-1)^n \frac{n^3 + 1}{2n^3 - 1}$

(c) $a_n := (-1)^n \left(n - 5 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \right) \cdot \frac{3n^5 - 8n + 1}{4n^5 - 2n^4 + n}$

(d) $a_n = (-3)^n + ((-1)^n + 1)5^n$

(e) $a_n = \sqrt[n]{3^n + ((-1)^n + 1)5^n}$

(f) $a_0 = 2, a_1 = 5, a_{n+2} = (-1)^{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \in \mathbb{N}_0$

(g) $a_0 = 4, a_1 = 5, a_{n+2} = (-1)^{n+1} \frac{a_{n+1}}{\min(a_n, a_{n+1})}, n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe H5.2 (6 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer unbeschränkten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die

- (a) keinen Häufungspunkt,
- (b) genau einen Häufungspunkt,
- (c) mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte

besitzt.

(Aufgaben H5.3 und H5.4 - siehe Seite 2)

Aufgabe H5.3 (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (n+1)^k - n^k$

- (a) für beliebiges $k \in (0, 1]$ konvergiert und
- (b) für beliebiges $k \in (1, \infty)$ divergiert.

Geben Sie für $k \in (0, 1]$ außerdem den Grenzwert der Folge an.

(Hinweis zu (a): Fallunterscheidung, Anwendung der Sandwichregel; Hinweis zu (b): Anwendung des binomischen Lehrsatzes für beliebige reelle Exponenten.)

Aufgabe H5.4 (5 Punkte)

Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, dann berechnen Sie ihren Grenzwert.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{2^k}$

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H5.5

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

- (a) $3x + 2 = 7x + 8$
- (b) $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$
- (c) $\frac{a+b}{x} - a = ab - \frac{a-b}{x}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ beliebig
- (d) $x^2 - 4x - 5 = 0$
- (e) $(3x-5)^2 - (2x+5)^2 = 0$
- (f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
- (g) $x^{10} + 6x^9 = -5x^8$
- (h) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
- (i) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$
- (j) $\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{x}$
- (k) $|4x^2 + 4x - 4| = 3$
- (l) $|2 - 3x| - |1 - x| + |2x + 2| = 3$

Hinweis zu (f): Substitution

Hinweis zu (h): erste Lösung erraten, dann Polynomdivision durchführen

Hinweis zu (i): erste Lösung erraten, dann Polynomdivision durchführen

Hinweis zu (k): Fallunterscheidung!

Hinweis zu (l): Fallunterscheidung!