Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 18.11.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H6.1 (9 Punkte)

Die DIN-Norm 476 legt die Größe von Papierformaten fest. Das größte Format A0 wird dabei auch als „Weltformat“ bezeichnet und wird dadurch definiert, dass es eine Fläche von einem Quadratmeter hat und das Seitenverhältnis der kürzeren zur längeren Seite $1 : \sqrt{2}$ beträgt. Die weiteren Formate werden wie folgt festgelegt: Das Format A1 erhält man, indem man ein A0-Blatt so faltet, dass seine Breitseiten aufeinander zu liegen kommen, also durch Halbierung der längeren Seite. Auf die gleiche Weise erhält man aus dem Format A1 das Format A2, daraus A3 und so weiter.

(a) Geben Sie Länge und Breite des A0-Formats (jeweils in Millimeter) und Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für Breite und $(l_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für die Länge des Formats A$n, n \in \mathbb{N}_0$ an, wobei die Folgenglieder b_n bzw. l_n jeweils als Vielfache von b_0 definiert werden sollen. Geben Sie außerdem den Grenzwert dieser Folgen an, und berechnen Sie Länge und Breite der Formate A4, A5, A7 und A15 (jeweils in Millimeter).

(b) Sei F_n die Fläche des Formats An. Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Summe der Flächen der Formate A0, A1, ..., Ak für beliebiges $k \geq 0$ auf. Welche Flächensumme (in m^2) ergibt sich beim Grenzübergang $k \to \infty$?

Aufgabe H6.2 (5 Punkte)

Ein nicht mehr genutztes Fabrikgebäude wird einem Investor zum 1. Januar eines Jahres zur dauernden Nutzung überlassen. Dabei wurde vereinbart, dass der Investor eine jährliche Rente von 150321 € jeweils am Jahresanfang (am 1.1.) zu zahlen hat. Der Diskontsatz beträgt 5.5 %.

(a) Wie hoch ist der heutige Barwert (d.h. zu Beginn der Nutzung), wenn das Fabrikgebäude nur 10 Jahre lang genutzt werden kann, danach abgerissen werden muss und die Rente dementsprechend 10 Jahre gezahlt wird?

(b) Wie hoch ist der heutige Barwert *aller* zukünftigen Renten?

(Hinweis: Der Barwert einer Rente x am Anfang eines Jahres wird als Endkapital einer „heute“ (d.h. am 1.1.) erfolgten Einzahlung y mit mit einer Verzinsung von p Prozent aufgefaßt. Der Barwert ist also der Wert der Rente zu Beginn des Rentenvorgangs.)

Aufgabe H6.3 (5 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^k$? Geben Sie für diese $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert an.

(Aufgaben H6.4 und H6.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe H6.4 (14 Punkte)

Stellen Sie für die folgenden Reihen $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ durch Berechnung der k-ten Partialsummen $s_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ (auf mindestens 10 Nachkommastellen genau) für die angegebenen $k \in \mathbb{N}$ eine Behauptung über die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihen auf. Beweisen Sie Ihre Behauptungen anschließend.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}, \quad k = 5, 10, 15, 20, 50, 100$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}, \quad k = 10, 100, 1000, 10000, 10000, 1000000$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{3n}^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{7n^2+3n+1}, \quad k = 10, 100, 1000, 10000, 10000, 1000000$

Aufgabe H6.5 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-11)^n}{3^{n^2+1}}$ konvergiert. Führen Sei den Beweis

(a) mit dem Quotientenkriterium,

(b) mit dem Wurzelkriterium,

(c) mit dem Majorantenkriterium sowie

(d) mit dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen.

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H6.6

Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen durch äquivalente Umformungen nach:

(a) $n^4 - 3n^3 + n^2 - 33n + 6 > n^3 + n^2 - 33n + 3$ für alle $n \geq 4$

(b) $\dfrac{3n+8}{4n^2-n+1} > \dfrac{3n^2-n+8}{4n^3+7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(c) $-\dfrac{2n^2-1}{2n^3+1} \geq -\dfrac{2n^3+1}{2n^2+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe H6.7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Ungleichungen:

(a) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$

(b) $\dfrac{3}{2x-4} < 2$

(c) $\dfrac{x-3}{x+1} > \dfrac{x+2}{x-1}$

(d) $\left|3x+2\right| \leq 2x - 1$

(e) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}x-1} > \sqrt{5}x + 1$