

# Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

## Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 25.11.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

### Aufgabe H7.1 (8 Punkte)

Gegeben Sei die Reihe  $R := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ .

- (a) Untersuchen Sie  $R$  mit dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen auf Konvergenz.
- (b) Ist die Reihe absolut konvergent?

(Hinweis zu (a): Zeigen Sie zuerst, dass  $3^n > n^4$  für  $n \geq 8$  gilt.)

### Aufgabe H7.2 (4 Punkte)

Weisen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung der Summanden die Konvergenz Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$$

nach, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

### Aufgabe H7.3 (6 Punkte)

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei absolut konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$  absolut konvergiert. Ist auch die Umkehrung dieser Schlussfolgerung richtig?

Hinweise: Überlegen Sie zuerst, welchen Grenzwert die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(|1 + a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  haben. Leiten Sie daraus eine geeignete obere Schranke für  $\left| \frac{a_n}{1 + a_n} \right|$  her, die für alle  $n \geq n_0$  ab einem geeignet gewählten  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt, und verwenden Sie das Majorantenkriterium.

### Aufgabe H7.4 (5 Punkte)

Gegeben seien die komplexen Zahlen  $x = 3 + 4i$  und  $y = 5 - 2i$ . Berechnen Sie

- (a)  $x + y$
- (b)  $x - y$
- (c)  $xy$
- (d)  $\frac{x}{y}$

Stellen Sie die Ergebnisse in der Form  $a + bi$  dar.

(Aufgaben H7.5 bis H7.7 - siehe Seite 2)

**Aufgabe H7.5** (5 Punkte)

Welche der folgenden Ungleichungen sind richtig bzw. sinnvoll? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

- (a)  $-2i^2 < 5$
- (b)  $(i + 2)^2 > 0$
- (c)  $i^2 + 2 > 0$
- (d)  $(1 + i)^4 > 0$
- (e)  $|\sqrt{21}i - 6| < |7 + 3i|$

**Aufgabe H7.6** (5 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{re}(z) + \operatorname{im}(z) \leq 10, \operatorname{im}(z) - \operatorname{re}(z) \leq 5, |z - 5i| \leq 4, \operatorname{im}(z) \geq \frac{3}{2} \right\}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene.

**Aufgabe H7.7** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  die folgende Gleichung gilt:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

---

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

**Aufgabe H7.8**

Berechnen Sie durch Anwendung der Potenzgesetze und *ohne* Taschenrechner:

- (a)  $3^4 \cdot 27^2 \cdot 9^{-5}$
- (b)  $125^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} \cdot 25^2$
- (c)  $(32^3)^2 \cdot (54^4)^{-2} \cdot 12^{(-2^3)} \cdot 3^{(3^3)}$

**Aufgabe H7.9**

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  ist eine Zuordnung, bei der jedem Element  $x \in D \subseteq \mathbb{R}$  genau ein Element  $y \in W \subseteq \mathbb{R}$  durch eine Zuordnungsvorschrift  $x \mapsto y = f(x)$  zugeordnet wird. Bei welchen der folgenden (ggf. erst noch nach  $y$  aufzulösenden) Zuordnungsvorschriften handelt es sich um Funktionen? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (a)  $y = 2x^2 + 1$
- (b)  $y^2 = x^2 + 1$
- (c)  $y = \begin{cases} 5x - 3\sqrt{x} + 1 & , \quad x \leq 4 \\ |x - 7| + 5x - 8 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$

$$(d) \quad |y| = 1 - \sqrt{x}$$

$$(e) \quad y = |1 - \sqrt{x}|$$

$$(f) \quad y = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 7 & , \quad x \leq 3 \\ |8 - 5x| + 2x + 5 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

### Aufgabe H7.10

Die Verkettung  $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  zweier Funktionen  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : D_g \rightarrow D_f \subseteq \mathbb{R}$  ist definiert als die Hintereinanderausführung der Funktionen, d.h.  $(f \circ g)(x) := f(g(x))$  für alle  $x \in D_g \subseteq \mathbb{R}$ . Berechnen Sie für die nachfolgenden Funktionen  $f$  und  $g$  jeweils die Funktionswerte  $(f \circ g)(1)$  und  $(g \circ f)(1)$ :

$$(a) \quad f(x) = x^2 + 1 \text{ und } g(x) = 2x - 7$$

$$(b) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \text{ und } g(x) = 2^{x+2}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & , \quad x < 2 \\ 11 - \sqrt{x} & , \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 & , \quad x < 3 \\ x^3 - 13 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$