

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 8 - Abgabe bis Dienstag, 02.12.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H8.1 (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n) + \cos(n) + 1}{e^{n+1} 7^n}$ konvergiert

- (a) mit dem Quotientenkriterium,
- (b) mit dem Wurzelkriterium sowie
- (c) mit dem Majorantenkriterium.

Warum kann bei (a) keine Grenzwertbetrachtung $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ durchgeführt werden?

Aufgabe H8.2 (12 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte existieren, und geben Sie diese ggf. an (ohne die eventuell bereits aus der Schule bekannte Regel von l'Hospital zu verwenden):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x)^{-1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{2 - \sqrt{x}}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 6x^4}{6x^3 + x^4}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^2} \right)$

Aufgabe H8.3 (5 Punkte)

Erstellen Sie mit Hilfe von Octave jeweils eine Grafik, in der der Funktionsgraph von

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{x^2}{4}\right)}{\exp\left(\frac{x}{10}\right)} & , \quad x < 0 \\ |\sin(x)| \cdot \ln(x+1) \cdot \left(-\frac{x^3}{456} + \frac{x^2}{213} - \frac{x}{135}\right) & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{x^2}{4}\right)}{\exp\left(\frac{x}{10}\right)} & , \quad x < 0 \\ |\sin(x)| \cdot \ln(x+1) \cdot \left(-\frac{x^3}{456} + \frac{x^2}{213} - \frac{x}{135}\right) + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

im Intervall $[-10, 10]$ dargestellt wird. Markieren Sie außerdem den links- und rechtsseitigen Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x)$$

in geeigneter Weise. Ergänzen Sie Ihre Grafiken jeweils durch eine Legende. Entscheiden Sie, ob beide Funktionen im Intervall $[-10, 10]$ stetig sind.

Aufgabe H8.4 (7 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der angegebenen Stelle x_0 stetig sind:

$$(a) \quad f(x) = 2x - 1, \quad x_0 = 1$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x_0 = 0$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 0$$

Aufgabe H8.5 (10 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind an der angegebenen Stelle x_0 stetig, welche unstetig? Begründen Sie ihre Antworten.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{für } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{für } x > -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 2 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)}, \quad x_0 = \frac{3}{4}\pi$$

$$(d) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x-2}}, \quad x_0 = -1$$

$$(e) \quad f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}, \quad x_0 = 2$$

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)^2}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H8.6

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ der Funktionen $f : D \rightarrow W$:

(a) $f(x) = x^2 + 2$

(b) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+2x+5}}{2x}$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+2x+5}}{2x^2}$

(e) $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x-5|}$

(f) $f(x) = \left| 2 - \sqrt{-x^2 - 4x + 21} \right|$

(g) $f(x) = \begin{cases} 2 \cos(x) & , \quad x \in (\infty, 0) \\ 5x^2 - 3x + 2 & , \quad x \in [0, 1) \\ 5 - \exp(1-x) & , \quad x \in (1, \infty) \\ -3 & , \quad x = 1 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) + 1 & , \quad x \in (\infty, 0) \\ x - 1 & , \quad x \in [0, 1) \\ \exp(1-x) - 2 & , \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$

Aufgabe H8.7

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und sie heißt *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Welche der folgenden Funktionen $f_1, \dots, f_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind gerade bzw. ungerade?

$$f_1(x) = x \quad ; \quad f_2(x) = x^2 \quad ; \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f_4(x) = x^2 + x \quad ; \quad f_5(x) = \cos(x)$$

$$f_6(x) = \sin(x) \quad ; \quad f_7(x) = x^2 \cos(x) \quad ; \quad f_8(x) = x \sin(x) \quad ; \quad f_9(x) = \cos(x) \sin(x) \quad ; \quad f_{10} = e^{\sin(x)}$$

Aufgabe H8.8

Berechnen Sie ohne Taschenrechner (und auch ohne andere technische Hilfsmittel):

(a) $20,87 + 1,2305 + 82,4 + 101,123 + 8,567 + 2,111 + 13,451 + 1,23456$

(b) $1,234 \cdot 2,134 \cdot 12,0013$

(c) $\sum_{n=0}^5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(d) $\sum_{n=2}^{100} \frac{(-1)^{4n-2} - 6}{1 + \sqrt{6}}$