

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 09.12.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H9.1 (7 Punkte)

- (a) Ist die komplexe Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := i + \frac{2+i}{1-ni}$ konvergent? (*Hinweis: Eine Folge komplexer Zahlen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die Folgen $(\operatorname{re}(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{im}(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren.*)
- (b) Weisen Sie Sie nach, dass die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+i}{2+10n} \right)^n$ konvergiert.
- (c) Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i+1)^n(n+i)}{i^n n!}$ auf Konvergenz.

Aufgabe H9.2 (8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x - |x^3|}{\sqrt{|x|}}$ in $x = 0$ stetig ergänzbar ist durch den Funktionswert $f(0) := 0$.
- (b) Ist die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x + \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)} & , \quad x \neq 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$ stetig? Falls nein, ist f dann in $x_0 = 1$ durch einen anderen Funktionswert stetig ergänzbar?

Aufgabe H9.3 (14 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{und} \quad g(x) := \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$$

- (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktionen f und g .
- (b) Skizzieren Sie die Funktionen f und g jeweils im Intervall $[-5, 5]$.
- (c) Überprüfen Sie jeweils für f und g , ob in den nicht zum Definitionsbereich zugehörigen Punkten eine stetige Ergänzung möglich ist.
- (d) Untersuchen das Verhalten der Funktionen f und g im Unendlichen, und geben Sie (mit Begründung) den Wertebereich der Funktionen f und g an.

(Aufgaben H9.4 und H9.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe H9.4 (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, so folgt stets $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- (b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, so folgt stets $\lim_{x \uparrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty$ und/oder $\lim_{x \downarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \mp\infty$ für jede beliebige, stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in (a, b)$. Weiter seien $f : [a, x_0) \cup (x_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ und $c := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$. Dann ist die Funktion f in x_0 stetig ergänzbar mit $f(x_0) := c$. (*Hinweis: Folgenkriterium der Stetigkeit*)
- (d) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in (a, b)$. Weiter seien $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige (nicht notwendig stetige) Funktionen. Es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $\lim_{x \uparrow x_0} g(x) = \lim_{x \downarrow x_0} h(x)$. Dann ist die Funktion f in x_0 stetig.

Aufgabe H9.5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{Q}$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3 - (b+2)x^2 + (2b-3)x + 3b}{x^2 - 8x + 15} & , \text{ für } x < 3 \\ ax^2 - x & , \text{ für } x \in [3, 5] \\ x \cos(x-5) & , \text{ für } x > 5 \end{cases}$$

in den Punkten $x = 3$ und $x = 5$ stetig ist. Ist f damit auf $\mathbb{R}$ stetig?

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H9.6

Welche der nachfolgenden Umformungen sind richtig bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antworten!

- (a) $\sum_{i=-10}^{10} a_i = \sum_{j=0}^{20} a_{j-10}$
- (b) $\sum_{i=1}^{2n} a_i = \sum_{i=1}^n 2a_i$
- (c) $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} + \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = 2 \sum_{j=1}^n a_j$
- (d) $\sum_{i=1}^n a_i b_{m+i} = \sum_{i=m+1}^{n+m} a_{i-m} b_i$
- (e) $\sum_{i=1}^n (5a_i + 1 + i) = \frac{n^2 + 3n}{2} + \sum_{j=1}^n 5a_i$
- (f) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=2}^{n+1} (a_i - 1)$

Aufgabe H9.7

Fassen Sie zu einem Logarithmus (ohne Vorfaktor) zusammen:

(a) $4 \cdot \ln(x^5)$, $x > 0$

(c) $\ln(5) + \ln(6) - \frac{1}{2} \cdot \ln(9)$

(b) $\frac{1}{2} \cdot (\ln(243) - \ln(3))$

(c) $\frac{\ln(7)}{\ln(4)} + \log_4(5)$

(d) $3 \cdot \lg(5) - \lg(4) + 2 \cdot \lg\left(\frac{1}{5}\right)$

Aufgabe H9.8

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $1123.123 - 457.5767 - 23.67 - 0.687 - 18.88912 - 101.00001$

(b) $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}$

(c) $\ln(\sqrt{e})$

(d) $\ln(\sqrt{9e} \cdot e^2)$