

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 10 - Abgabe bis Dienstag, 16.12.2014, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H10.1 (5 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

- (a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := x \cdot g(x)$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f in $x_0 = 0$ stetig ist.
- (b) Ist die durch $f(x) := x^2 \cdot g(x)$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Aufgabe H10.2 (10 Punkte)

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = \ln \left(\frac{\exp(x)}{x^2 + 1} \right)$
- (b) $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1-x}{x^2-1}$
- (c) $f(x) = \sin^4 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$
- (d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x \exp(\cos^2(x))}$
- (e) $f(x) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$
- (f) $f(x) = x^{x \ln(x)}$

Aufgabe H10.3 (10 Punkte)

Diskutieren Sie das Monotonieverhalten von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe der ersten Ableitung:

- (a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{8}x^2 - 4x$
- (b) $f(x) = \sin \left(\frac{x}{2} \right)$
- (c) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + 2x$
- (d) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ e^x - x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

(Aufgaben H10.4 und H10.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe H10.4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sqrt{e^x + 2} = \cos(x) - 3x$ genau eine Lösung besitzt.
(Hinweise: Zwischenwertsatz; die Lösung der Gleichung muss nicht berechnet werden.)

Aufgabe H10.5 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} (a+b+c)e^{-2x} + bx + \sin(cx) - 21 & \text{für } x < 0 \\ 2ax^2 + b + 2c(x+1) - 43 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3(a+b)e^{(x-1)} + (b+c)x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig und einmal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe H10.6 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion mit $f(1) := 0$, $f(2) := 1$ und $f(3) := 4$. Weisen Sie nach, dass es reelle Zahlen x_1, x_2 und x_3 gibt, für die gilt $f'(x_1) = 1$, $f'(x_2) = 2$ und $f'(x_3) = 3$. Geben Sie kleinstmögliche Intervalle (a, b) an, in denen x_1, x_2 bzw. x_3 liegen.

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, diese Aufgaben zur Wiederauffrischung/Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H10.7

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $\ln(x-1) + \ln(3) = \ln(x^2-1)$

(b) $\ln(x) - \ln(4) = \ln(35) - \ln(x+4)$

(c) $\ln(x-2) - \frac{1}{2} \cdot \ln(4) = \frac{1}{3} \cdot \ln(125) - \ln(x+1)$

(d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{(2x-3)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{(3x+5)}$

(e) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$

(f) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$ (Hinweis: Substitution und „p-q-Formel“)

Aufgabe H10.8

Bestimmen Sie die Gleichung eines Polynoms zweiten Grades, das durch die Punkte $A = (-1, -6)$, $B = (1, -4)$ und $C = (2, -9)$ verläuft.

Aufgabe H10.9

Berechnen Sie ohne Taschenrechner (und auch ohne andere technische Hilfsmittel):

(a) $425148 : 213$

(b) $1226 : 101$

(c) $2.381 : 7$