

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 11 - Abgabe bis Dienstag, 06.01.2015, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H11.1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrempunkte der Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5.$$

Aufgabe H11.2 (14 Punkte)

Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$

eine Kurvendiskussion mit folgenden Inhalten durch: Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen und stetige Ergänzbarkeit, Verhalten im Unendlichen, Monotonieverhalten, Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte.

Aufgabe H11.3 (15 Punkte)

Gegeben sei die stetige Funktion $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1)^3 x^2 & , \quad x \in [-2, 1] \\ \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) & , \quad x \in [1, 5] \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten aller lokalen Minima, lokalen Maxima und Sattelpunkte von f . Bestimmen Sie außerdem die globalen Extremwerte von f . (*Hinweis: Bevor Sie die Funktion rechnerisch untersuchen, empfehlen wir die Funktion zuerst im Intervall $[-2, 5]$ sowie im Intervall $[-0.2, 0.1]$ zu skizzieren.*)

Aufgabe H11.4 (5 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow W$ mit $f(x) = 3 + 2\sqrt{x}$ bijektiv ist, geben Sie den Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ von f an, und berechnen Sie die Umkehrfunktion. Berechnen Sie außerdem den Funktionswert $(f^{-1})'(7)$ der ersten Ableitung der Umkehrfunktion

- (a) durch direkte Berechnung der Ableitung von f^{-1} sowie
- (b) durch Verwendung des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe H11.5 (14 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-2x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)}$

(d) $\lim_{x \downarrow 0} (3^x \sqrt{x})^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Aufgabe H11.6 (22 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$g(x) = \frac{\exp(2 \sin(x) + 1) + 3x - 1}{\cos^2(x) + 2} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1}{5}x^5 - x + 1.$$

- Zeigen, Sie dass g im Intervall $[a, b] = [-\pi, \pi]$ eine Nullstelle besitzt.
- Weisen Sie nach, dass h in $\mathbb{R}$ *genau eine* Nullstelle besitzt. Geben Sie ein kleinstes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ an, in dem die diese Nullstelle liegt. (*Hinweis: Lokale Extremstellen und Monotonieverhalten.*)
- Versuchen Sie die Nullstelle von g bzw. h genauer zu lokalisieren, in dem Sie wiederholt das Intervall $[a, b]$ bzw. anschließend geeignet gewählte Intervalle $[a_k, b_k]$ halbieren. Formulieren Sie einen Algorithmus, der diese Vorgehensweise beschreibt.
- Schreiben Sie ein Octave- oder Matlab-Programm `nullstellenberechnung.m`, das den Algorithmus aus (c) für einen beliebige, stetige Funktion f durchführt. Die Funktion soll dabei in jedem Iterationsschritt k die Intervallmitte x_k und den Funktionswert $f(x_k)$ anzeigen, und die Nullstelle $x^* \in [a, b]$ zurückgeben. Senden Sie Ihre Funktion bis zum Abgabetermin per E-Mail an jens.kunath@tu-cottbus.de, Betreff: IT 3, Aufgabe H11.6. Geben Sie den Quelltext zusätzlich ausgedruckt mit Ihren handschriftlichen Lösungen mit ab.
- Berechnen Sie mit der Funktion aus (d) die Nullstelle von g im Intervall $[-\pi, \pi]$ bzw. die einzige Nullstelle von h in $\mathbb{R}$ jeweils näherungsweise auf *mindestens* acht Nachkommastellen genau. (*Hinweis: Geben Sie die Zwischenergebnisse k , x_k und $f(x_k)$ gemäß Aufgabenteil (d) als Ausdruck mit ab. Dazu können die Ergebnisse des k -ten Iterationsschrittes zeilenweise in eine Matrix `disp_matrix` geschrieben werden, die dann z.B. mit `csvwrite('dateiname.csv', disp_matrix)` als csv-Datei gespeichert und ggf. anschließend z.B. mittels Texteditor oder Excel formatiert werden kann.*)



Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2015
wünschen die Mitarbeiter des Lehrstuhls für Numerische und Angewandte Mathematik.

Zusatzaufgabe (ohne Punkte) – Die Lösungen sind mit Großbuchstaben einzutragen, Umlaute entsprechend, z.B. ä als AE usw. Bei Rechenaufgaben ist die Lösung als Zahl einzutragen.

- griechischer Mathematiker und Namensgeber für ein wichtiges Axiom der reellen Zahlen
 - alternative Bezeichnung für eine konvergente Folge
 - jede Teilmenge eines abgeschlossenen Intervalls ist ...
 - Bezeichnung einer konvergenten Reihe mit positiven Summanden als obere Schranke
 - Konvergenzkriterium für alternierende Reihen
 - hilfreiches Werkzeug zum Beweis der Unstetigkeit einer Funktion
 - ohne diesen Satz wäre das Verfahren in Hausaufgabe H11.6 nicht zu begründen
 - oft hilfreiches Kriterium zur Konvergenzuntersuchung von Reihen, deren Summanden Quotienten sind
 - spezielle Darstellung komplexer Zahlen
 - eine Voraussetzung an eine Funktion zur Anwendung von Fixpunktsatzes
 - Beweismethode zum Konvergenznachweis bei Folgen mit Analogie zur Nahrungsaufnahme
 - zur Untersuchung dieser Eigenschaft kann man die erste Ableitung einer Funktion verwenden
 - bei Studenten wenig beliebte, elementare Rechenart
 - das Gegenteil von Divergenz
 - Differentialrechnung: Verallgemeinerung des Satzes von Rolle
 - die Sinus-Funktion hat an den Stellen $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3}{2}\pi$ etwas, was die Cosinus-Funktion dort nicht hat
 - Länge des Ortsvektors einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene
 - die Ableitung einer Funktion f in x_0 ist die Steigung der ... in x_0
 - in der Schulmathematik häufig verwendeter Begriff für ein lokales Maximum
 - wichtiges Werkzeug bei der Lösung von Ungleichungen mit Beträgen, Wurzelausdrücken oder Quotienten
 - nicht jede beschränkte Menge besitzt über dem Körper $\mathbb{Q}$ ein ...
 - Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
 - Teil einer Reihe
 - ein (oder sogar DAS?) „Lieblingswerkzeug“ in vielen Hausaufgaben
 - interne Abkürzung für die Rechenregeln für konvergente Folgen in der Übungsstunde