Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 12 - Abgabe bis Dienstag, 13.01.2015, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H12.1 (8 Punkte)

Führen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(x) \cdot \big(\ln(x) - 2\big)$ eine Kurvendiskussion mit folgenden Inhalten durch: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen und stetige Ergänzbarkeit, Verhalten im Unendlichen, Monotonieverhalten, Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte.

Aufgabe H12.2 (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzintervalle der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{n!} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x-2)^n$

Aufgabe H12.3 (12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

(a) Entwickeln Sie die Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ in eine Taylorreihe, und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Weisen Sie nach, dass für das Restglied die Abschätzung $\big|R_4(x)\big| \le 3 \cdot 10^{-5}$ für alle $x \in \big[0, \frac{1}{10}\big]$ gilt.

Aufgabe H12.4 (5 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big)$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe?

(Aufgabe H12.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe H12.5 (6 Punkte)

Weisen Sie nach, dass

$$\frac{1-x}{1-x-2x^2} \;=\; \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\big(2^n+2(-1)^n\big)x^n$$

für $|x| < \frac{1}{2}$ gilt. Untersuchen Sie die Konvergenz der angegebenen Potenzreihe für $x = \pm\frac{1}{2}$.
Hinweis: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch und verwenden Sie die geometrische Reihe.

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, diese Aufgaben zur Vertiefung und Festigung weiter zurückliegender Themen zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H12.6

Bestimmen Sie Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen. Untersuchen Sie $\mathcal{L}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ auf die Existenz von Infimum, Supremum, Mininum und Maximum, und geben Sie diese Zahlen im Fall ihrer Existenz an. Was ändert sich, wenn man die Ungleichungen über dem Körper $\mathbb{Q}$ betrachtet?

(a) $\dfrac{x-1}{\sqrt{7x}-1} \;\geq\; \sqrt{7x}+1$

(b) $\dfrac{x-1}{\sqrt{7x}+1} \;\geq\; \sqrt{7x}-1$

(c) $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{7x}+1} \;\geq\; \sqrt{7x}-1$

(d) $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{7x}-1} \;\geq\; \sqrt{7x}+1$

(e) $\dfrac{x-1}{\sqrt{7}x-1} \;\geq\; \sqrt{7}x+1$ *Hinweis: Es gilt* $\frac{1}{7} \approx 0.14286$ *und* $\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.37796$.

(f) $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{\sqrt{7}x-1}} \;\geq\; \sqrt{\sqrt{7}x+1}$ *Hinweis: Es gilt* $\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.37796$ *und* $\frac{\sqrt{13}-1}{6} \approx 0.43426$.

(g) $\dfrac{x-1}{\sqrt{\sqrt{7}x-1}} \;\geq\; \sqrt{\sqrt{7}x+1}$

(h) $\dfrac{x+1}{\sqrt{7}x-1} \;\geq\; \dfrac{\sqrt{7}x+1}{|x-2|}$ *Hinweis: Es gilt* $\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.37796$, $\frac{1-\sqrt{97}}{16} \approx -0.55305$ *und* $\frac{1+\sqrt{97}}{16} \approx 0.67805$.

Zusatz: Lösen Sie die Aufgaben <u>*ohne*</u> Taschenrechner!