

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 13 - Abgabe bis Dienstag, 20.01.2015, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H13.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x) = \tan(x)$ und drücken Sie diese jeweils durch f aus.

Aufgabe H13.2 (7 Punkte)

Zu einer beschränkten Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien $U(f)$ und $V(f)$ wie folgt definiert:

$$U(f) := \{g \mid g \text{ einfache Treppenfunktion zu einer Zerlegung } \Delta \text{ von } [0, 1] \text{ mit } g(x) \leq f(x) \forall x \in [0, 1]\}$$

$$V(f) := \{g \mid g \text{ einfache Treppenfunktion zu einer Zerlegung } \Delta \text{ von } [0, 1] \text{ mit } g(x) \geq f(x) \forall x \in [0, 1]\}$$

Außerdem seien $u_f := \sup \left\{ \int_0^1 g(x) dx \mid g \in U(f) \right\}$ und $v_f := \inf \left\{ \int_0^1 g(x) dx \mid g \in V(f) \right\}$ definiert.

- (a) Betrachten Sie eine äquidistante Zerlegung $\Delta_4 := \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ des Intervalls $[0, 1]$ mit $x_j := \frac{k}{n}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Stellen Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ sowie je eine Funktion $g \in U(f)$ und $h \in V(f)$ zur Zerlegung Δ_4 des Intervalls $[0, 1]$ in einer gemeinsamen Skizze grafisch dar, wobei für jedes Teilintervall $[x_j, x_{j+1})$ der Zerlegung Δ_n gelten soll: $g(x_j) = f(x_j)$ bzw. $h(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$. Zeichnen Sie in die Grafik außerdem auch die Flächen $\int_0^1 g(x) dx$ und $\int_0^1 h(x) dx$ ein.
- (b) Bestimmen Sie u_f und v_f zu $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in [0, 1]$. Betrachten Sie dazu $g_n \in U(f)$ und $h_n \in V(f)$ zur Zerlegung $\Delta_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit

$$x_0 := 0, \quad x_1 := \left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad x_2 := \left(\frac{2}{n}\right)^2, \quad \dots, \quad x_n := \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1.$$

für $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Ist $f(x) = \sqrt{x}$ integrierbar? Falls ja, dann begründen Sie dies unter Rückgriff auf die Definition von Ober- und Unterintegral und berechnen Sie $\int_0^1 \sqrt{x} dx$.

Aufgabe H13.3 (22 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_{-1}^2 \frac{3}{2}x^2 + 2x - 5 dx$.

(b) Berechnen Sie mit partieller Integration eine Stammfunktion von $f(x) = e^{2x} \cos(x) dx$.

(c) Berechnen Sie $\int_{-\pi}^0 (x^2 + 1) \cdot \sin(2x) dx$.

(d) Berechnen Sie $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \exp(\cos^2(x) + 1) dx$ mit der Substitutionsmethode.

- (e) Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung das bestimmte Integral $\int_2^3 \frac{2x^2 + x + 9}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx$, und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.
- (f) Berechnen Sie mit der Substitution $z = \tan(x)$ das Integral $\int \frac{dx}{1 + \tan(x)}$.

Aufgabe H13.4 (5 Punkte)

Durch $y = 6x - x^2$ und $y = x^2 - 2x$ sind zwei Parabeln bestimmt, die eine Fläche A einschließen. Skizzieren Sie die Parabeln und berechnen Sie den Flächeninhalt von A .

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, diese Aufgaben zur Vertiefung und Festigung weiter zurückliegender Themen zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H13.5

- (a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt{n + 6\sqrt{n}} - \sqrt{n + 4\sqrt{n}}$ für $n \geq 1$ auf Konvergenz.
- (b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n := (-1)^n \cdot \left(n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right) \cdot \frac{5n^7 + \cos((2n+1)\pi)}{\sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) - 8n^7}$$

- (c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{5n^2 + 8n + 3}{12n^2 - n - 22} \cdot \frac{7n^3}{22 - 12n^3} \cdot \frac{(n+1)^2 - 2}{(n-1)^2 + 2}$.
- (d) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei beliebige Folgen. Weiter seien a bzw. b Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit dem Häufungspunkt $a + b$.

Aufgabe H13.6

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{2n-1}}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{5|x|} \right)^n$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, aber *fest* gewählt sei.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{(n!)^2}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos(n\pi)}{n}$

Berechnen Sie bei (b) zusätzlich den Grenzwert.