Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 14 - Abgabe bis Dienstag, 27.01.2015, 11:30 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H14.1 (19 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_0^1 x^3 - 3x^2 + 9x + 1 \, dx$

(b) Berechnen Sie $\int_{-3}^4 \max\left\{x^2 + 4x - 4, 3x + 2\right\} \, dx$

(c) Berechnen Sie $\int_{-1}^1 |x| + 1 \, dx$

(d) Berechnen Sie $\int \cos(5x)e^{-x} \, dx$ mit partieller Integration.

(e) Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$ mit der Substitution $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$.

(f) Berechnen Sie $\int_0^y \frac{6(\ln(1+2x))^2}{1+2x} \, dx$, wobei $y \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig ist.

Aufgabe H14.2 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale[1], existieren und bestimmen Sie deren Wert:

(a) $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2}\right) \, dx$

(b) $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \sqrt[3]{x^2}\right) \, dx$

Aufgabe H14.3 (4 Punkte)

Gegeben sei die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(3(x-1)\right) + x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ x^2 + x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

(Aufgaben H14.4 und H14.5 - siehe Seite 2)

[1] **Definition**: Sei $f : (a, b] \to \infty$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a + \varepsilon, b]$ für $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx$ existiert, dann setzen wir $\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx$. Das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ heißt uneigentliches Integral. Analog definiert man $\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) \, dx$ für $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, falls f auf jedem der Intervalle $[a, b]$ für $b > a$ integrierbar ist und der genannte Grenzwert existiert.

Aufgabe H14.4 (6 Punkte)

Ein Gefäß ist zur Zeit $t = 0$ mit V_0 cm^3 einer unverdünnten flüssigen Substanz gefüllt. Zur Verdünnung fließen pro Sekunde W cm^3 Wasser zu und gleichzeitig nach idealer Durchmischung W cm^3 Flüssigkeit ab. Bestimmen Sie das Volumen $V(t)$ der zur Zeit $t \geq 0$ noch vorhandenen Substanz in der Mischung.

Hinweis: Zur Zeit t seien $V(t)$ cm^3 Substanz im Gefäß. Berechnen Sie zunächst $V(t+h)$, in dem man für h Sekunden Wasser zufließen läßt, dann umrührt, und dann vom Gemisch entsprechend viel Flüssigkeit abläßt, d.h. modellieren Sie einen kleinen Zeitschritt. Mit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{V(t+h) - V(t)}{h}$ gelingt dann der Übergang zur Differentialgleichung. Lösen Sie das Anfangswertproblem.

Aufgabe H14.5 (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Trapezregel zur näherungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ vorgestellt. Schreiben Sie eine Octave- oder Matlabfunktion `trapezregel.m`, der neben der Funktion f eine *beliebige* Zerlegung $a =: z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n := b$ des Intervalls $[a, b]$ übergeben wird. Die Funktion soll die Trapezregel auf jedes der Integrale $\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, anwenden und diese entsprechend aufsummieren. Ergebnis soll der Näherungswert für $\int_a^b f(x)\,dx$ sein. Testen Sie Ihre Funktion zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_{-2}^{2} \exp\left(1 - \left|\exp(1-x^2) \cdot (x^2+2) \cdot \cos^2(x) - \ln(x+5) \cdot x^2\right|\right) dx$$

mit den äquidistanten Zerlegungen

$$z_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}\ , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 50, 100, 1000, 10000, 100000, 500000, 1000000$. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Wird bei Vergrößerung der Anzahl n von Zerlegungspunkten $z_0, \ldots, z_n$ der berechnete Näherungswert in jedem Fall besser? Diskutieren Sie diese Frage kritisch.

Hinweis: Senden Sie Ihre Funktion bis zum Abgabetermin per E-Mail an `jens.kunath@tu-cottbus.de`*, Betreff: IT 3, Aufgabe H14.5. Geben Sie den Quelltext zusätzlich ausgedruckt mit Ihren handschriftlichen Lösungen ab.*

Die nachfolgenden Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben und werden nicht bewertet. Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, diese Aufgaben zur Vertiefung und Festigung weiter zurückliegender Themen zu bearbeiten. Gerne können die Lösungen zur Kontrolle mit den Pflichtaufgaben mit abgegeben werden.

Aufgabe H14.6

Zeigen Sie, dass die Funktion f aus H14.3 für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig, aber nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe H14.7 (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2010/2011)

Gegeben seien die reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (-\pi, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \\ \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) & , \quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) := \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos(x)-1}{x} & , \quad x > 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

(a) Ist die Funktion f in $x = 1$ stetig und stetig differenzierbar?

(b) Kann man die Konstante c in der Funktion g so wählen, dass g in $x = 0$ stetig ist?

Aufgabe H14.8 (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2010/2011)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $f'(0) < 0$ (ii) $f'(2) > 0$ (iii) $f(1) = -2$

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ (v) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ (vi) $f''(x) > 0$ für $x \in [0, 2]$

Welche Folgerung aus diesen Bedingungen ist zulässig?

☐ (a) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p = 1$ ein lokales Minimum besitzt.

☐ (b) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein lokales Maximum besitzt.

☐ (c) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein lokales Minimum besitzt.

☐ (d) Aus (i) und (ii) folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $p \in (0, 2)$ mit $f'(p) = 0$ gibt. Aus den restlichen Bedingungen folgt, dass f in $p \in (0, 2)$ ein globales Minimum besitzt.

Aufgabe H14.9 (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2011/2012)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und stetig differenzierbare Funktion. Der Zwischenwertsatz (in der Variante als Nullstellensatz) besagt: Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$. Für welche der folgenden Funktionenklassen folgt stets die Eindeutigkeit des Punktes $c \in (a, b)$ (unabhängig von weiteren, nicht bekannten Eigenschaften der Funktion f)?

☐ (a) Für jede beliebige stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

☐ (b) Für keine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

☐ (c) Für jede stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

☐ (d) Für jede stetige und stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.