Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 15 - Abgabe bis Donnerstag, 05.02.2015, 11 Uhr im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 14 ergeben.

Aufgabe H15.1 (17 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$e^y = \frac{x+1}{y'}$$

Geben Sie die Lösungskurven zu den Anfangswerten $y(1) = 1$ bzw. $y(-2) = 0$ an.

(b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $e^y = \dfrac{y'}{x+1}$ mit $y(1) = 0$.

(c) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y'\sqrt{y} - \frac{10x+7}{\sqrt{y}} = 0 \quad , \quad y > 0 \quad , \quad y(1) = 5$$

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2013/14)

(d) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $1 + y^2 - xy' = 0$ mit $y(1) = 1$.

Aufgabe H15.2 (12 Punkte)

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{y'}{\sqrt{2-\cos(x)}} = y\sin(x)$$

mit $y > 0$ und dem Anfangswert $y(0) = \exp\left(\frac{3}{2}\right)$. (*Hinweis: Verwenden Sie nach der Trennung der Variablen auf einer Seite bei der Integration eine geeignete Substitution!*)

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2013/14)

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x^2 - 2x - 8)yy' - (5x-8)(y^2+1) = 0$$

mit $x \in [-1, 2)$, $y \geq 0$ und $y(-1) = 0$. (*Hinweis: Führen Sie nach Trennung der Variablen auf einer Seite Partialbruchzerlegung zur Integration durch.*)

Aufgabe H15.3 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\quad y' = \dfrac{4+y^2}{4+x^2}$.

(b) Geben Sie zwei spezielle Lösungen von (a) mit $y(0) = 0$ bzw. $y(0) = 1$ an.

Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ *zur Vereinfachung der allgemeinen Lösung.*

Aufgabe H15.4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\quad xy' - 2y = x^3\cos(x)$.

Aufgabe H15.5 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\quad \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \;=\; \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass die Gleichung $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1) \;=\; 2n^2 + n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe H15.6 (20 Punkte)

Bestimmen Sie Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden (Un)gleichungen unter Berücksichtigung der angegebenen Nebenbedingung. Untersuchen Sie $\mathcal{L}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ auf die Existenz von Infimum, Supremum, Mininum und Maximum, und geben Sie diese Zahlen im Fall ihrer Existenz an. Was ändert sich, wenn man die (Un)gleichungen über dem Körper $\mathbb{Q}$ betrachtet?

(a) $\dfrac{13-3x^2}{\sqrt{11}x-1} \;>\; \sqrt{11}x+1 \quad$ unter der Nebenbedingung $\quad x \geq -\sqrt{11} \qquad$ *Hinweis: Es gilt* $\sqrt{11} \approx 3.3166$.

(b) $\sin^4(x) - \dfrac{1}{2}\sin(x) \;=\; \dfrac{1}{2}\sin^2(x) - \sin^3(x) \quad$ unter der Nebenbedingung $\quad x \in \big[-2\pi, 3\pi\big]$

Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Substitution.

(c) $\dfrac{x^2+4}{6x^2+11} \;\leq\; \dfrac{1}{x^2-4} \quad$ ohne Nebenbedingungen

Aufgabe H15.7 (12 Punkte)

(a) Stellen Sie die komplexen Zahlen $\quad v = \dfrac{5+5i}{1+2i} - \dfrac{5-5i}{1-2i} \quad$ und $\quad w = \dfrac{8-2i}{4-i} \quad$ in der Form $a+bi$ dar.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z \;=\; \left(\frac{3-2i}{2+3i}\right)^2 \;+\; \frac{(-1-i)^3}{\sqrt{2}\Big(\cos\big(-\frac{3}{4}\pi\big) + i\sin\big(-\frac{3}{4}\pi\big)\Big)}$$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die die Gleichung $\quad z^3 = -\dfrac{2}{i}z - \dfrac{5}{1+2i}z \quad$ erfüllt ist und stellen Sie diese in der Form $z = a+bi$ dar:

Aufgabe H15.8 (7 Punkte) (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2013/14)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\quad a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+2}}{5^k}$

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{(-1)^n 3n^2 - 2n + (-1)^n}{5n^2 + (-1)^n n} + c_n$, wobei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} c_{3k} = -\dfrac{3}{2}$, $\lim\limits_{k\to\infty} c_{3k+1} = \dfrac{1}{2}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} c_{3k+2} = 2$ ist.

Aufgabe H15.9 (8 Punkte) (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2013/14)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-3)^n + (-1)^{n+1}}{4^n + 8}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\left(3 + (-1)^n\right)^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sqrt{n}}{(n+2)!}$

Aufgabe H15.10 (4 Punkte)

Sind für die unendliche Reihe

$$R \;:=\; 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^4} + \dots$$

die Voraussetzungen des Konvergenzkriteriums von Leibniz erfüllt?

Aufgabe H15.11 (5 Punkte)
Weisen Sie nach, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

konvergiert, indem Sie die Beschränktheit der zugehörigen Partialsummenfolge nachweisen. Zeigen Sie dazu zuerst mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \;<\; 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt.

Aufgabe H15.12 (10 Punkte)
Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \left|x^2 - 1\right| + \left|x\right| - 1$$

eine Kurvendiskussion mit folgenden Inhalten durch: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Monotonieverhalten, Koordinaten der lokalen Extrem- und Wendepunkte.

Aufgabe H15.13 (17 Punkte) (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2013/14)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sin(-\pi x) - \dfrac{1}{2}x & , \quad x \le \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1 - \sqrt{2x}}{\exp(2x-1) - 1} & , \quad x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion in $x_0 = \dfrac{1}{2}$ stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \quad x \leq 0 \\ \Big(2 - \big(\cos(\pi x)\big)^2\Big)^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Lage und die Art der lokalen Extremwerte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \left(x^2 - 3x - \frac{3}{2}\right) \cdot \exp(2x) \; .$$

(d) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x \cdot x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f?

Aufgabe H15.14 (13 Punkte) (Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus, Wintersemester 2013/14)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos(8x) + 1}{\ln\left(e \cdot \frac{x^2}{\pi^2}\right) - 1} & , \quad x \in (0, \pi) \\ \\ \cos(x) + 1 & , \quad x \in [\pi, 2\pi] \\ x^2 - 4x\pi + 4\pi^2 & , \quad x \in (2\pi, \infty) \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion in den Stellen $x_1 = \pi$ bzw. $x_2 = 2\pi$ stetig ist.

(b) Weisen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten nach, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 3x - 1 & , \quad x < 1 \\ 2x^2 - x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$ differenzierbar ist, und geben Sie $f'(x_0)$ an. (*Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten, dass f in x_0 linksseitig und rechtsseitig differenzierbar ist.*)

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schätzen Sie das Restglied für $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ nach oben ab.