

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 08. bis 10. Oktober 2014

Aufgabe Ü1.1

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{12}$

(c) $\left(\sqrt[3]{3^6} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} \right)^{-1}$

(d) $4^{21} \cdot \left(\frac{1}{64} \right)^8$

Aufgabe Ü1.2

Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^4 - y^4}$

(b) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2} - \frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2} - \frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

(c) $\frac{x|x-3|}{(x^2-x-6)|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 3\}$

(d) $\frac{x^{-47}b^5y^{-1}z^{-3}}{a^{-4}c^{-9}} : \frac{x^{-50}b^3y^{-2}}{a^{-3}z^7c^{-8}}$

Aufgabe Ü1.3

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 5\}$$

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - \frac{7}{4} < 0 \right\}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 4x + 21 \geq 0\}$$

Stellen Sie die Mengen als Intervalle dar und bestimmen Sie:

(a) $A \cap B$

(b) $B \cap C$

(c) $A \cup (B \cap C)$

(d) $(B \cap C) \setminus (A \cap B)$

(e) $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)) \cap C$

(f) $(\mathbb{R} \setminus C) \cap A$

Aufgabe Ü1.4

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

(c) $n^2 > 2n + 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

(d) $a_n := 5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar.

(e) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$ für $n \geq 2$.

(f) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Aufgabe Ü1.5

Ergänzen Sie in den grauen Feldern ein geeignetes Relationszeichen (mit Begründung). Geben Sie ggf. auch an, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen gelten.

(a) $\frac{n+2}{n(n+1)^2} \quad \blacksquare \quad \frac{1}{n+2}$

(b) $\frac{1}{5n^2 - 3n + 298} \quad \blacksquare \quad \frac{1}{5n^2 + n - 3}$

(c) $\frac{13n - 14}{10^n - 3n + \sqrt{n}} \quad \blacksquare \quad \frac{13n - 12}{5n^2 + 2^n + \sqrt{n}}$

(d) $\frac{2n^3 - n^2 + n - 1}{5n^4 + n^2 - n + 1} \quad \blacksquare \quad \frac{2n^3 + (n-1)^2}{4n^4 + 2n^2 - n - 2}$

(e) $\frac{5n+8}{2n^2+n} - \frac{2n^2-1}{2n^3+1} \quad \blacksquare \quad \frac{3n+2}{4n^3-n} - \frac{2n^3+1}{2n^2+3}$