

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 15. bis 17. Oktober 2014

Aufgabe Ü2.1

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes: Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

- (b) Zeigen Sie, dass zu jeder reellen Zahl $a > 1$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass $a^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe Ü2.2

Welche der reellen Zahlen

$$-22, -\frac{11}{8}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{5}, \frac{9}{4}, \frac{9}{2}, 10, 100, 1000$$

sind untere bzw. obere Schranken der Menge

$$M := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left(1, \frac{9}{4} \right) ?$$

Geben Sie das Infimum und das Supremum der Menge M an. Hat M ein Minimum und ein Maximum?

Aufgabe Ü2.3

Welche der folgenden Mengen sind nach unten (un)beschränkt, nach oben (un)beschränkt oder (un)beschränkt?

- (a) $A := (-\infty, 2]$
- (b) $B := (-1, 2]$
- (c) $C := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (d) $D := \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \leq 8 \right\}$
- (e) $E := \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$
- (f) $F := \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, 0 < |m| \leq |n| \right\}$
- (g) $G := [1, 2) \cup (20, 30) \cup \{51\}$
- (h) $H := \{q \in \mathbb{Q} \mid |q| > \frac{8}{7}\}$
- (i) $I := \{x \in \mathbb{R} \mid -4x^2 + 2x + 16 \geq -2x^2 - 2x\}$
- (j) $J := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x-2|}{x+4} < x \right\}$

Geben Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Mengen an, falls dies möglich ist.

Aufgabe Ü2.4

Begründen Sie, warum die Menge $M = (\sqrt{2}, 1)$ im Körper $\mathbb{R}$ ein Infimum besitzt, im Körper $\mathbb{Q}$ dagegen nicht.

Aufgabe Ü2.5

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU CS, Wintersemester 2013/14)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Menge. Welche der nachfolgenden Zahlen $K \in \mathbb{R}$ kann allgemein als Schranke für M gewählt werden?

- ☐ (a) $K = \min \{ \inf(M) , \sup(M) \}$
- ☐ (b) $K = \max \{ \inf(M) , \sup(M) \}$
- ☐ (c) $K = \max \{ |\inf(M)| , |\sup(M)| \}$
- ☐ (d) $K = \min \{ |\inf(M)| , |\sup(M)| \}$
- ☐ (e) $K = \max \{ |\min(M)| , |\max(M)| \}$
- ☐ (f) $K = \min \{ |\min(M)| , |\max(M)| \}$

Beweisen Sie Ihre Auswahl, und begründen Sie, warum die Alternativen nicht richtig sind.