
Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 22. bis 24. Oktober 2014

Aufgabe Ü3.1

Geben Sie eine explizite und eine rekursive Darstellung der nachfolgenden Folgen an:

(a) $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

(b) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$

(c) $5, 9, 17, 33, 65, \dots$

Aufgabe Ü3.2

Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind arithmetische Folgen, geometrische Folgen und/oder alternierende Folgen? Untersuchen Sie die Folgen zudem auf Beschränktheit und diskutieren Sie die Monotonie.

(a) $a_n := n + 3$ für $n \geq 0$

(b) $a_n := \frac{(-1)^n}{2^n}$ für $n \geq 0$

(c) $a_0 := 1, a_n := a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ für $n \geq 1$

(d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{2, 6, 18, 54, \dots\}$

(e) $a_n := \frac{1}{n+1}$ für $n \geq 0$

(f) $a_n := 2n + (-1)^n$ für $n \geq 0$

Aufgabe Ü3.3

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus WS 2012/13)

Ein Fass mit einem maximalem Fassungsvermögen von 100 Liter enthält 20 Liter Wasser und ist porös. Eine Sisypthusarbeit: Karl-Otto rennt mit einem Eimer hin und her und schüttet in Abständen von einer Minute 5 Liter in den Behälter. Leider sickert umso mehr Wasser durch die Löcher, je weiter das Fass bereits gefüllt ist. Während Karl-Otto hin und her läuft verliert das Fass wieder 10% seines eben noch vorhandenen Inhalts.

(a) Formulieren Sie die Füllmenge des Fasses als rekursive Folge.

(b) Untersuchen Sie die Existenz eines Grenzwertes?

(c) Wird das Fass jemals voll? Falls nicht, wo liegt seine Grenze?

Aufgabe Ü3.4

Stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf. Beweisen Sie die Konvergenz gegen den Grenzwert a mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen, und bestimmen Sie außerdem einen kleinsten Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für die angegebenen $\varepsilon > 0$ jeweils $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

(a) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-9}, 10^{-16}$

(b) $a_n = (3 + (-1)^n) \frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-9}, 10^{-16}$

(c) $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$, $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$

(d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$, $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$

(e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$

(f) $a_n = \frac{c}{n!}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig sei, $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$

Aufgabe Ü3.5

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann ebenfalls eine Nullfolge ist. Kann auf die Voraussetzung „ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt“ verzichtet werden? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel)!