

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 29. bis 30. Oktober 2014

Aufgabe Ü4.1

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(b) Sei $c > 0$ beliebig. Beweisen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

(Hinweis zu (a): Schätzen Sie zunächst $(1 + \varepsilon)^n$ für $n \geq 2$ geeignet nach unten ab.)

Aufgabe Ü4.2

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie Ihren Grenzwert.

Aufgabe Ü4.3

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

(a) $a_n := \frac{2n^3 - 5n^2 + 7}{8n^3 + 3n - 13}$

(b) $a_n := \left(\frac{2n^3 - 5n^2 + 7}{8n^3 + 3n - 13} \right)^3 - \left(\frac{2n^3 - 5n^2 + 7}{8n^3 + 3n - 13} \right)^2 + \frac{2n^3 - 5n^2 + 7}{8n^3 + 3n - 13}$

(c) $a_n := \left(3n^2 + 5n + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - n$

(d) $a_n := n + 1 - \frac{(n-1)^2}{n+1}$

(e) $a_n := \frac{n}{n+1} + (-1)^n$

(f) $a_n := \sqrt{n^4 + 1} - n^2$

(g) $a_n := \frac{4^{2n}}{3^{4n}}$

(h) $a_n := \frac{3^n - 2n - 1}{5^n + n^5 + n} + \frac{3n^2 + 2n + 1}{1 - n - 7n^2}$

(i) $a_n := \frac{\sqrt{n^5 + 7n^2 + 4}}{n^2 + n + 1}$

(j) $a_n := \frac{(n+1)!}{\sqrt{n} + 1}$