Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 05. bis 07. November 2014

Aufgabe Ü5.1

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(3n^2+5n+1\right)^{\frac{1}{2}} - n \qquad \text{und} \qquad b_n := \sqrt{n^2+n} - n\,.$$

Warum sind die folgenden Rechnungen falsch bzw. unzulässig?

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2\left(3+\tfrac{5}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right)} - \lim_{n\to\infty} n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{3n^2} - \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{3}n - n\right) = (\sqrt{3}-1)\lim_{n\to\infty} n = \infty\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2\left(1+\tfrac{1}{n}\right)} - \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2} - \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \left(n-n\right) = 0$$

Aufgabe Ü5.2

Nach Definition aus der Vorlesung heißt a Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert. In der Literatur wird auch der Begriff des Häufungswertes verwendet. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Existenz von Häufungspunkten. Geben Sie falls möglich alle Häufungspunkte an.

(a) $a_n := (-1)^n \cdot \dfrac{3n^2+2n+1}{2-5n^2}$

(b) $a_n := 6n + 36\left\lfloor -\dfrac{n}{6}\right\rfloor + \dfrac{6n^3-1}{8-3n^3}$

(c) $a_n := 6n + 36\left\lfloor -\dfrac{n}{6}\right\rfloor + \dfrac{(-1)^n 6n^3-1}{8-3n^3}$

(d) $a_n := 7n + 36\left\lfloor -\dfrac{n}{6}\right\rfloor - 3\left\lfloor \dfrac{n}{3}\right\rfloor$

(e) $a_n := 7n + 36\left\lfloor -\dfrac{n}{6}\right\rfloor - 4\left\lfloor \dfrac{n}{4}\right\rfloor$

(f) $a_n := 7n + 36\left\lfloor -\dfrac{n}{6}\right\rfloor - 5\left\lfloor \dfrac{n}{5}\right\rfloor$

Aufgabe Ü5.3

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Folgen $(s_k)_{k\in N}$, $N \subseteq \mathbb{N}_0$:

(a) $s_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(b) $s_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(c) $s_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{2^n}{3^{n-1}}$

(d) $s_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{(-4)^{n+1}}{5^{n-1}}$

Aufgabe Ü5.4

Ein Kunde schließt mit seiner Bank einen Ratensparvertrag über 20 Jahre zu einem Zinsfluss von traumhaften 5 Prozent ab. Zu Beginn des ersten Jahres zahlt er einen Einmalbetrag von 1000 Euro ein und anschließend jeweils am Ende des Jahres eine Rate von 250 Euro. Welchen Wert hat das Kapital nach 20 Jahren?