

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 03. bis 05. Dezember 2014

Aufgabe Ü9.1

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen und untersuchen Sie, ob die Funktionen auf ganz D stetig sind. Falls dabei eine Funktion in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.

(a) $f(x) := \frac{2 - \sqrt{3 + 5x}}{5x - 1}$

(b) $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & , \quad x \leq -3 \\ \frac{1}{x+4} & , \quad -3 < x \leq -1 \\ \frac{|x-4|}{x+2} & , \quad x > -1 \end{cases}$

(d) $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x - \pi}\right)$

Aufgabe Ü9.2

Elli und Paul starten am Samstag um 6 Uhr zu einer Wanderung. Ziel ist es, eine hoch in den Bergen gelegene Hütte zu erreichen, wobei zu vorab festgelegten Zeiten kleinere Pausen eingelegt werden. Trotz dieser Pausen haben sie bereits um 12 Uhr ihr Ziel erreicht und stärken sich in der Hütte mit einer wohlverdienten Suppe. Am Morgen des darauffolgenden Sonntags beginnen Elli und Paul den Abstieg ins Tal, wobei sie den gleichen Weg wählen, auf dem sie schon den Aufstieg bewältigt haben. Abmarsch an der Berghütte ist um 6 Uhr. Während einer der notwendigen Pausen kommt die Frage auf, ob es wohl einen Ort auf dem Weg gibt, den sie am Tag zuvor zum gleichen Zeitpunkt passiert haben. Welche Antwort gibt es auf diese Frage (mit Begründung)?

Aufgabe Ü9.3

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Der Zwischenwertsatz besagt: Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$. Diese in der Vorlesung bewiesene Variante des Zwischenwertsatzes wird auch Nullstellensatz genannt. Daraus folgt die allgemeine Version des Zwischenwertsatzes: Gilt $f(a) < d < f(b)$ für $d \in \mathbb{R}$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = d$.

- (a) Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert.
- (b) Weisen Sie nach, dass die auf dem Intervall $[a, b] = [-2, 2]$ definierte Funktion $f(x) := \frac{x+2}{2x+5}$ alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und berechnen Sie alle Fixpunkte von f .
- (c) Geben Sie ein Beispiel für ein offenes Intervall (a, b) und eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ an, so dass f keinen Fixpunkt hat.