

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 10. bis 12. Dezember 2014

Aufgabe Ü10.1

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen f für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

(a) $f(x) = 3x^2 + \sin(x)$

(b) $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x)$

(c) $f(x) = \sin(3x^2) + 5$

(d) $f(x) = \cos^2(3x^2)$

(e) $f(x) = \frac{3x^2}{\sin(x) + 2}$

(f) $f(x) = \ln\left(\exp(x^2) \cdot \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot 5^x\right)$

Aufgabe Ü10.2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{für } x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \exp(4 - x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ definiert. Untersuchen Sie die

Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ auf Stetigkeit. Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ differenzierbar? Geben Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe Ü10.3

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und im offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion: Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. Überprüfen Sie die Anwendbarkeit des Mittelwertsatzes, indem Sie (falls möglich) für die folgenden Funktionen alle x_0 aus den angegebenen Intervallen $[a, b]$ bestimmen, für die $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$ gilt:

(a) $f(x) = x^3 - 2x$ im Intervall $[0, 2]$

(b) $f(x) = |x - 2|$ im Intervall $[-1, 4]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1, 3]$

Aufgabe Ü10.4

Bestimmen Sie Art aller lokalen Extremstellen $\hat{x}$ von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

(a) durch Lösung der Gleichung $f'(\hat{x}) = 0$ (notwendige Bedingung) und Überprüfung des Vorzeichens von $f''(\hat{x})$ (hinreichende Bedingung),

(b) durch Diskussion des Monotonieverhaltens von f .

Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Methoden (a) und (b)? Kann Methode (a) für jede beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet werden, um die lokalen Extremwerte zu bestimmen?