

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Aufgaben für die Übungen vom 17. bis 19. Dezember 2014

Aufgabe Ü11.1

In Aufgabe Ü10.2 wurde die Funktion $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{für } x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \exp(4 - x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht. Weisen Sie nach, dass die Funktion f zwei lokale Extremwerte besitzt und geben Sie die Art und die Koordinaten der lokalen Extremwerte an.

Aufgabe Ü11.2

Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x^2$.

Aufgabe Ü11.3

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine mindestens dreimal stetig differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ heißt Sattelpunkt der Funktion f , falls f kein Extrempunkt von f ist. Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt von f mit zur x -Achse paralleler Tangente.

- (a) Zeigen Sie: Gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt.
- (b) Weisen Sie durch ein geeignetes Beispiel nach, dass die Bedingung $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend ist.
- (c) Geben Sie ein Beispiel für eine genau dreimal stetig differenzierbare Funktion an, für die die Bedingung $f'''(x_0) \neq 0$ nicht hinreichend ist, d.h. auch wenn f in x_0 einen Sattelpunkt hat, gilt $f'''(x_0) = 0$.

(Hinweis: Die Aussagen (a) bis (c) lassen sich verallgemeinern: Dazu sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0,$$

dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt.)

Aufgabe Ü11.4

- (a) Zeigen Sie, dass die stetige Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und geben Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3} - 1}{4x - 12}$ mit der Regel von l'Hospital.
- (c) Berechnen Sie $\lim_{x \downarrow 0} x^x$.
- (d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4 \cdot \frac{2x + 4}{x^2}$ im Unendlichen.

- (e) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x}$ existiert. Warum kann die Regel von l'Hospital hier nicht angewendet werden?
- (f) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$. Warum kann auch dieser Grenzwert nicht mit der Regel von l'Hospital berechnet werden?
- (g) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{\exp(x^2 - 1) - x^2}{x^{-2} - \exp(1 - x^2)}.$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion f in $x = 1$ stetig ergänzbar ist, indem Sie den Grenzwert $f(1) := \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ berechnen. Geben Sie außerdem den Grenzwert $f(-1) := \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ an, ohne diesen zu berechnen (mit Begründung).

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU-Cottbus, WS 2012/13)