

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2014/2015

Zwischenklausur vom 03. Dezember 2014

Name : _____
 Matrikelnummer : _____
 Übungsgruppe : _____

Aufgabe(n)	1 bis 8	9	10	11	12	Σ	Note	Zusatzpkt. f. d. Prüfung
mögliche Punkte	16	4	12	14	6	52	-	7
erreichte Punkte								

Hinweise: In den Ankreuzfragen 1 bis 8 gibt es *genau eine* richtige Antwort. Kreuzen Sie in den Aufgaben 1 bis 8 jeweils die richtige Antwort an. Für falsche Antworten werden keine negativen Punkte vergeben. Bei den Aufgaben 9 bis 12 muss jede Lösung klar begründet und der Lösungsweg nachvollziehbar angegeben werden. Außer den Vorlesungs- und Übungsmitschriften und einer Formelsammlung sind keine Hilfsmittel erlaubt! Alle technischen Geräte sind abzuschalten und außer Reichweite zu legen. Bitte nicht mit roter Farbe schreiben! Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle bereit. **Bearbeitungszeit: 80 Minuten**

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $\alpha \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Man kann zeigen, dass es eine kleinste natürliche Zahl n_0 gibt, für die

$$\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 > n$$

mit $n := n_0$ gilt. Was ist die Grundlage dafür, dass die Gültigkeit der Ungleichung auch für $n := n_0 + 123$ nachgewiesen werden kann?

- ☐ (a) Axiom des Archimedes
- ☐ (b) Peano-Axiome
- ☐ (c) Vollständigkeitsaxiom

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist für die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid 1 < x \leq 2\}$ richtig?

- ☐ (a) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ das Infimum $\inf(M) = 1$ und das Supremum $\sup(M) = 2$.
- ☐ (b) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Infimum, aber das Supremum $\sup(M) = 2$.
- ☐ (c) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Infimum und kein Supremum.
- ☐ (d) Die Menge M besitzt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Supremum, aber das Infimum $\inf(M) = 1$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei monotone Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ und n_0 sei die kleinste natürliche Zahl mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Was folgt dann für die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ mit $a_n := \frac{b_n}{c_n}$?

- ☐ (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- ☐ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ☐ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- ☐ (d) Die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist unbestimmt divergent.
- ☐ (d) Es ist keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz möglich.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass es zu jedem $S > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_0}| \geq S$ gibt. Welche Aussage über die Anzahl der Häufungspunkte ist für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ möglich?

- ☐ (a) Es ist keine Aussage über die Anzahl der Häufungspunkte möglich.
- ☐ (b) Die Folge hat eine endliche Anzahl von Häufungspunkten.
- ☐ (c) Die Folge hat unendlich viele Häufungspunkte.
- ☐ (d) Die Folge hat keine Häufungspunkte.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und es gelte $-\frac{3}{4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq -\frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- ☐ (a) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine alternierende und $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Eine Aussage über absolute Konvergenz ist nicht möglich.
- ☐ (b) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine alternierende und $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Aus den Voraussetzungen folgt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{3}{4} < 1$, woraus zusätzlich die absolute Konvergenz der Reihe folgt.
- ☐ (c) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine alternierende und $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergiert. Aus den Voraussetzungen folgt aber $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{3}{4} < 1$, d.h. die Reihe konvergiert absolut.
- ☐ (d) Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine alternierende und $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium folgt deshalb, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n| + \frac{1}{4}} < \frac{3}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was läßt sich über die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aussagen?

- ☐ (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
- ☐ (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ möglich.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Was gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}$ der Ungleichung $|z|^2 < z \cdot \bar{z}$ mit $z \in \mathbb{C}$?

- ☐ (a) $\mathcal{L}$ ist leer, da auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation definiert ist.
- ☐ (b) $\mathcal{L}$ ist leer, da $|z|^2 > z \cdot \bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.
- ☐ (c) $\mathcal{L}$ ist leer, da $|z|^2 - z \cdot \bar{z} < 0$ ein Widerspruch ist.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Es seien $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -3\}$ und $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$.

- ☐ (a) M_1 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = \sqrt{3}$ für alle $z \in M$ und M_2 besteht aus unendlich vielen Elementen und es gilt $|z| = 1$ für alle $z \in M$
- ☐ (b) $M_1 = \{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\}$ und $M_2 = \{-1, 1, -\sqrt{i}, \sqrt{i}, \}$
- ☐ (c) $M_1 = \{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\}$ und $M_2 = \{-1, 1, -i, i\}$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der Ungleichung

$$\sqrt{7x} + 1 \leq \frac{|x-1|}{\sqrt{7x}-1}.$$

Geben Sie Infimum und Supremum von $\mathcal{L}$ an. Hat $\mathcal{L}$ ein Minimum und ein Maximum?

Aufgabe 10 (12 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\frac{3(n+1)^3}{2n^3 - 99n^2 - 51n + 89} \cdot \frac{2(n+11)(n-11)}{5n^2 + 8n - 1} - \frac{7n}{5n-1} \right)^2$$

(b) Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{\cos(n+1) + (-1)^n}{n+2}$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

(c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_0 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ für $n \geq 1$ auf Konvergenz.

(d) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(n + 2 \left\lfloor -\frac{n}{2} \right\rfloor \right) \cdot \frac{3n}{5n+8}.$

Aufgabe 11 (14 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{n+1}}{3^n}.$

(b) Weisen Sie nach, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}\pi)}{(\exp(n+3))^n}$ absolut konvergiert.

(c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n)!}$ konvergent?

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$ konvergiert.

(e) Warum kann man die Konvergenz der Reihe in (d) nicht mit Hilfe des Quotientenkriteriums nachweisen? Führt die Verwendung des Wurzelkriteriums zum Ziel?

Aufgabe 12 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x < -1 \\ x + 2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit, dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = -1$ nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit, dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.