

Vorlesungen am 16./17.12.2015 (mit integrierter Übung)

Definition 7.22: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ ein **lokales Maximum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$$

gilt [bzw. **lokales Minimum**, falls $f(x) \geq f(x_0)$]. Man sagt, dass f in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum besitzt, wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder lokales Minimum hat. Weiter heißt x_0 ein strenges lokales Maximum bzw. Minimum, wenn in den Ungleichungen die Gleichheit nur für $x = x_0$ gilt.

Satz 7.23: Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

- (a) Ist f in (a, x_0) streng monoton wachsend und in (x_0, b) streng monoton fallend, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.
- (b) Ist f in (a, x_0) streng monoton fallend und in (x_0, b) streng monoton wachsend, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Satz 7.24: Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) zweimal stetig differenzierbar.

- (a) Besitzt die Funktion f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.
- (b) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum.
- (c) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Bemerkung 7.25: Die Umkehrungen der drei Aussagen (a) bis (c) in Satz 7.24 gelten nicht. Standardbeispiele: $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^4$.

Definition 7.26: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex** (bzw. linksgekrümmt), wenn für alle $x, y \in D \subseteq \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Gilt in der Ungleichung statt „ $\leq$ “ nur „ $<$ “, dann heißt f streng konvex auf $[a, b]$. Die Funktion f heißt **konkav** (bzw. rechtsgekrümmt), wenn $-f$ konvex ist.

Satz 7.27: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) zweimal stetig differenzierbar. Falls für alle $x \in (a, b)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) > 0 \\ f''(x) \leq 0 \\ f''(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ gilt, dann ist } f \text{ in } [a, b] \left\{ \begin{array}{l} \text{konvex} \\ \text{streng konvex} \\ \text{konkav} \\ \text{streng konkav} \end{array} \right\}.$$

Definition 7.28: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen **Wendepunkt**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f in

$$(x_0 - \varepsilon, x_0) \text{ konvex und in } (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{ konkav}$$

ist (oder umgekehrt).

Satz 7.29: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) dreimal stetig differenzierbar.

- (a) Besitzt die Funktion f in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt, so gilt $f''(x_0) = 0$.
- (b) Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung 7.30: Die Umkehrungen der Aussagen (a) und (b) aus Satz 7.29 gelten nicht. Standardbeispiele: $f(x) = x^4$ und $f(x) = x^5$.

Bemerkung 7.31: Aussage (b) aus Satz 7.29 lässt sich genauer formulieren: Gilt $f'''(x_0) > 0$, dann findet in x_0 ein Wechsel von konkav nach konvex statt bzw. gilt $f'''(x_0) < 0$, so findet in x_0 ein Wechsel von konvex nach konkav statt.

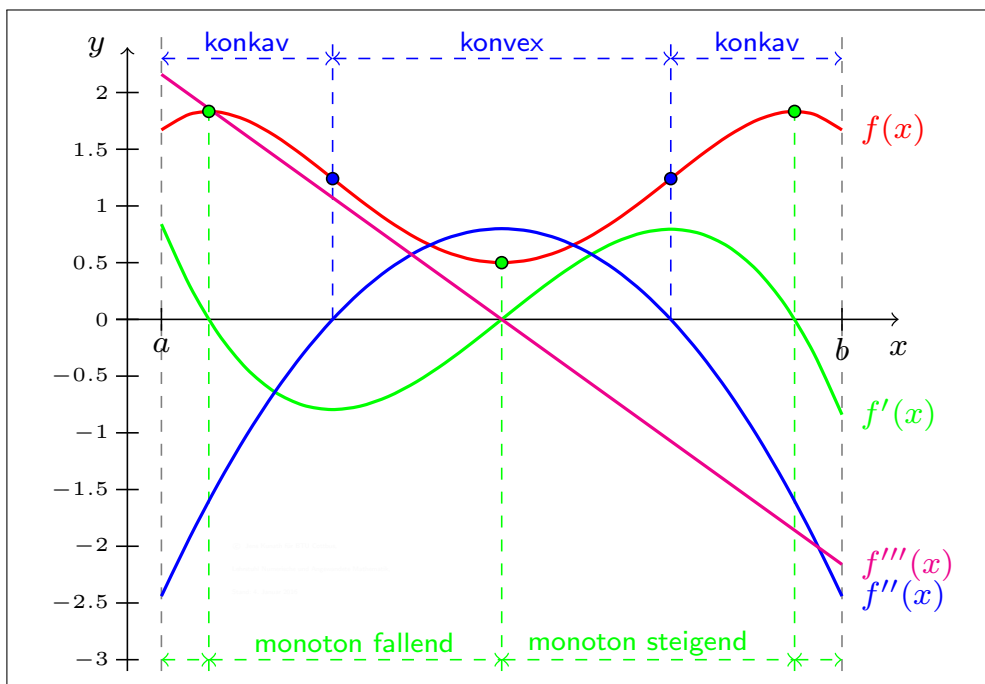


Abb. 1: Zusammenhänge zwischen einer Funktion f , ihren ersten drei Ableitungen, lokalen Extremwerten ●, Wendepunkten ●, Monotonie und Krümmungsverhalten.

Definition 7.32: Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ heißt **Sattelpunkt** der Funktion f , falls x_0 kein Extrempunkt von f ist. Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt von f mit zur x -Achse paralleler Tangente.

Satz 7.33: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine in (a, b) mindestens dreimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt.

Bemerkung 7.34:

- (a) Die Bedingung $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend. Beispiel: $f(x) = x^4$.
- (b) Die Bedingung $f'''(x_0) \neq 0$ ist nicht hinreichend, d.h. auch wenn f in x_0 einen Sattelpunkt hat, gilt $f'''(x_0) = 0$.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 & , \quad x < 0 \\ x^4 & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(c) Satz 7.33 läßt sich verallgemeinern: Dazu sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 ,$$

dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt.

Satz 7.35 (Regeln von l'Hospital) Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar für $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Für alle $x \in (a, b)$ sei $g'(x) \neq 0$ und es existiere der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dann gelten folgende Aussagen (analog auch für den linksseitigen Grenzübergang nach b):

(a) Falls $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ gilt, dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(b) Falls $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$ gilt, dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \leq x_0$ mit $a < x_0 < b$ und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

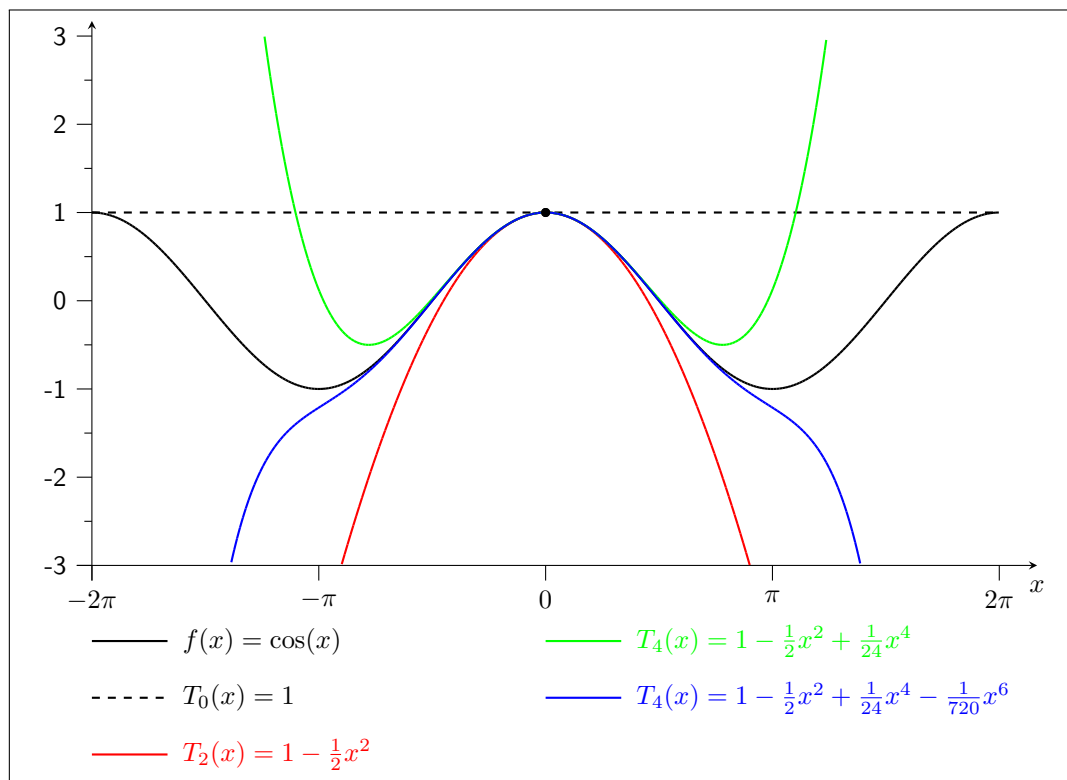


Abb. 2: Approximation von $f(x) = \cos(x)$ durch Polynome $T_k(x)$ vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$.

Definition 7.36: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$.

Der Ausdruck

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt **Potenzreihe** um den Entwicklungspunkt x_0 .

Satz 7.37: Sei $P(x)$ die Potenzreihe aus Definition 7.36. Wenn $P(\hat{x})$ für eine reelle Zahl $\hat{x} \neq x_0$ konvergiert, dann konvergiert $P(x)$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < |\hat{x} - x_0|$.

Definition 7.38: Sei

$$M := \left\{ |x - x_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konvergiert} \right\}.$$

Die Zahl

$$R := \sup(M)$$

heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Bemerkung 7.39: Für den Konvergenzradius $0 \leq R \leq \infty$. Dabei bedeutet $R = 0$, dass die Potenzreihe nur für den Entwicklungspunkt absolut konvergiert und $R = \infty$ bedeutet die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Fall $0 < R < \infty$ konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ absolut, die Konvergenz in den „Randpunkten“ $x = x_0 \pm R$ folgt damit jedoch nicht automatisch und ist gesondert zu untersuchen.

Satz 7.40: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe.

- (a) Wenn die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert oder bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, dann gilt

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- (b) Wenn die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert oder bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, dann gilt

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Für $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ wird $R = \infty$, für $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ wird $R = 0$ gesetzt.

Bemerkung 7.41: Satz 7.40 (b) kann auf den Fall verallgemeinert werden, dass die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unbestimmt divergiert. Dann setzt man

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei das Symbol $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ **Limes superior** der Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt, und als größter Häufungspunkt der Folge definiert ist.

Definition 7.42: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in [a, b]$. Das Polynom

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned}$$

heißt **Taylorpolynom** vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$ zu f um den Entwicklungspunkt x_0 . Der Fehler

$$R_k(x) = f(x) - T_k(x)$$

an der Stelle $x \in [a, b]$ wird das **Restglied** genannt.

Definition 7.43: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in [a, b]$. Die Potenzreihe

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

heißt **Taylorreihe** von f mit Entwicklungspunkt x_0 .

Satz 7.44: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(k+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und $T_k(x)$ das Taylorpolynom vom Grad k zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 \in [a, b]$. Zu jedem $x \in [a, b]$ gibt es ein $c \in (x_0, x)$ (falls $x_0 < x$ bzw. $c \in (x, x_0)$, falls $x_0 > x$) mit

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

Außerdem gilt

$$|R_k(x)| \leq \frac{C}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1},$$

wobei $C > 0$ eine obere Schranke von $|f^{(k+1)}(x)|$ in $[a, b]$ ist.