

Inhaltsübersicht zu den Vorlesungen am 20./21./27.01.2016

10 Differentialgleichungen

Zur Einleitung zwei Aufgabenstellungen:

- **Aufgabe 1:** Im Dickdarm befinden sich Kolibakterien. Bei schwacher körperlicher Verfassung können sie in eine Niere vordringen und Nierenbeckenentzündung verursachen. Die Infektion macht sich bemerkbar, sobald etwa 10^8 Kolibakterien in der Niere sind. Kolibakterien verdoppeln ihre Anzahl etwa alle 20 Minuten. Angenommen, 100000 Kolibakterien seien in die linke Niere gelangt. Wieviele Stunden dauert es, bis der Bakterienstamm die kritische Größe erreicht hat? Dabei soll angenommen werden, dass keine Bakterien durch Harnableitung entfernt werden und ihre Anzahl sich auch nicht durch Einnahme von Medikamenten reduziert.

$60x, x$ in Stunden	Anzahl $y(x)$	Zuwachs $y(x) - y(x - \frac{20}{60})$
0	100000	—
20	200000	100000
40	400000	200000
60	800000	400000
80	1600000	800000
100	3200000	1600000
120	6400000	3200000
140	12800000	6400000
160	25600000	12800000
180	51200000	25600000
200	102400000	51200000

- **Aufgabe 2:** Ein ruhig atmender erwachsener Mensch macht etwa 16 Atemzüge pro Minute. Bei jedem Atemzug dringt ungefähr ein halber Liter Luft in die Lungen ein. Die ausgeatmete Luft enthält näherungsweise 20 % weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Es sei angenommen, dass die ausgeatmete Luft sofort und vollständig mit der Zimmerluft vermischt. Weiter nehmen wir an, dass sich in einem geschlossenen Zimmer mit V Liter Luftinhalt genau ein ruhig atmender Erwachsener befindet. Mit $y(x)$ sei für x Minuten nach $x_0 = 0$ das Sauerstoffvolumen in Liter in dem Zimmer bezeichnet, und es sei $y(0) = y_0$. Bestimmen Sie $y(x)$.

Definition 10.1: gewöhnliche Differentialgleichung (nachfolgend kurz: DGL) n -ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$); explizite/implizite Form; Lösungsbegriff; Anfangswertproblem (kurz: AWP)

Beispiel 10.2:

(a) $y' = \lambda y$ wird gelöst durch $y(x) = ce^{\lambda x}$, $c \in \mathbb{R}$

(b) $y'' + y = 0$ wird gelöst durch $y(x) = \cos(x) + \sin(x)$ [Lösung auch hier nicht eindeutig]

(c) $y' = \lambda y$ mit $y(0) = 5$ hat die eindeutige Lösung $y(x) = 5e^{\lambda x}$

In dieser Vorlesung werden ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet, d.h. der Fall $n = 1$ bzw. $y' = f(x, y)$.

Richtungsfeld als Beispiel für die geometrische Interpretation von $y' = f(x, y)$.

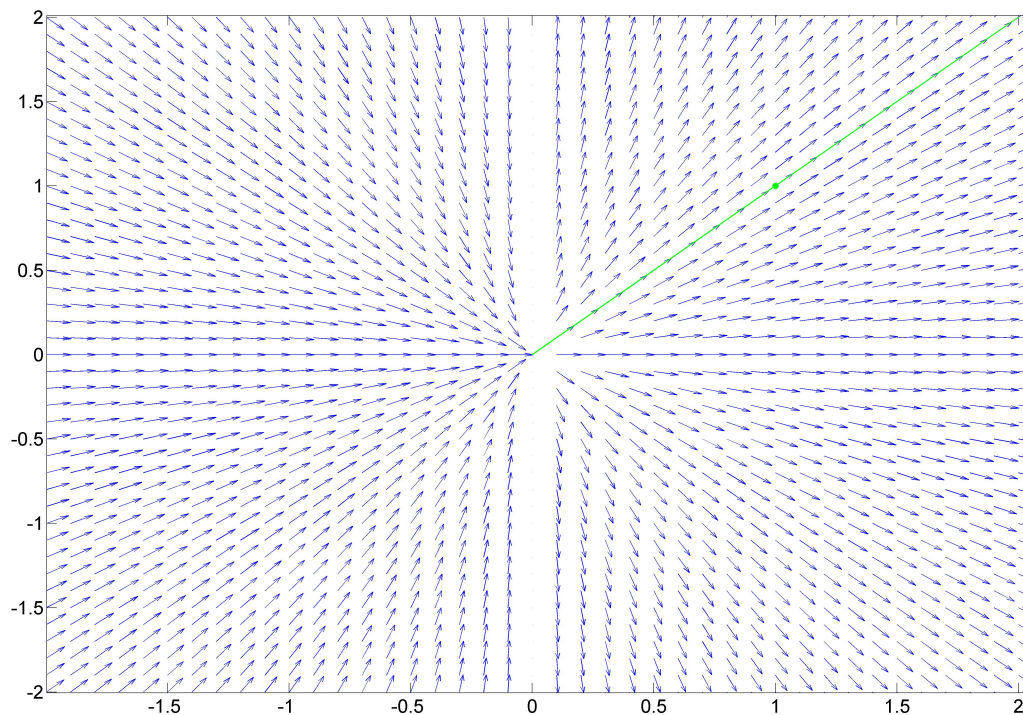


Abb. 1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ und Lösungskurve (grün) zum Anfangswert $y(1) = 1$ (grüner Punkt).

Definition 10.3: DGL mit getrennten Variablen (auch: trennbare/separierbare DGL): $y' = f(x) \cdot g(y)$

Beispiel 10.4:

(a) $y' = 5xy$

(b) $y' = (5x + 5 \cos(x)) \cdot y$

(c) $y' = (5xy + 5 \cos(x)) \cdot y$ [nicht trennbar!]

Satz 10.5: Methode der Trennung der Variablen (kurz: TDV) - siehe zum Beispiel in:

- O. Forster, Analysis 2, Vieweg, 8. Auflage, Wiesbaden 2008
- H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, 3. Aufl., Stuttgart 1995.

Beweis von Satz 10.5.

Bemerkung 10.6: einprägsamere Formulierung („Praxisvariante“) von TDV

Beispiel 10.7:

- (a) $y' = 1$ [Lösung: $y(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$]
- (b) Lösung von Aufgabe 1 [Lösung: $y(x) = 100000e^{2x}$]
- (c) Lösung von Aufgabe 2 [Lösung: $y(x) = y_0 \cdot \exp\left(-\frac{8}{5V}x\right)$]
- (d) logistisches Wachstum: $y' = \lambda y(m - y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}, m > 0$ [Lösung: $y(x) = \frac{m}{1 + c \exp(-\lambda m t)}, c \in \mathbb{R}$]
- (e) $y' = -xe^y$ [Lösung: $y(x) = -\ln\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right), c \in \mathbb{R}$]

Definition 10.8: lineare DGL erster Ordnung $y' = a(x)y + s(x)$, Unterscheidung homogener / inhomogener Fall

Herleitung einer Lösung zu einer inhomogenen linearen DGL erster Ordnung, siehe auch

<http://vieta.math.tu-cottbus.de/~kunath/Allgemein/bspInhomDGL.pdf>

Zusammenfassung als **Satz 10.9**

Beispiel 10.10:

- (a) $y' = y + x$ [Lösung: $y(x) = ce^x - x - 1, c \in \mathbb{R}$]
- (b) $y' = \frac{y}{x} + 2x^2, x > 0$ [Lösung: $y(x) = cx + x^2, c \in \mathbb{R}$]
- (c) $y' = \cos(x)y + e^{\sin(x)}$ [Lösung: $y(x) = e^{\sin(x)}(c + x), c \in \mathbb{R}$]

Definition 10.11: homogene DGL $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Satz 10.12: Lösung homogener DGL (siehe z.B. Literatur zu Satz 10.5)

Beweisskizze zu Satz 10.12

Beispiel 10.13:

- (a) $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, x \neq 0$ [Lösung: $y(x) = x \tan(\ln|x| + c), c \in \mathbb{R}$]
- (b) $y' = \frac{x - y}{x + y}$ [Lösung: $y(x) = -x \pm \sqrt{c + 2x^2}, c \in \mathbb{R}$]
- (c) $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ [Lösung: $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + (y(x))^2 = \frac{c^2}{4}, c \in \mathbb{R}$]

Numerische Lösung von AWP (lokale Approximation von $y(x)$ durch Tangenten, Parallelverschiebung der Tangenten auf bereits berechnete Näherungspunkte, Konstruktion eines Polygonzuges), Zusammenfassung als:

Algorithmus 10.14: Euler-Verfahren (auch Eulersches Polygonzugverfahren)

Definition 10.15: (Approximations-) Gitter, äquidistantes Gitter

Definition 10.16: Einschrittverfahren

Lemma 10.17: $y(x)$ ist genau stetig differenzierbare Lösung des AWP $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, wenn gilt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt .$$

Beweis von Lemma 10.17.

Numerische Integration des Integrals in Lemma 10.17 liefert Einschrittverfahren:

- Integration mittels Rechteckregel liefert das Euler-Verfahren
- Integration mittels Trapezregel liefert das Verfahren von Heun

Hinweis auf Verallgemeinerung (Runge-Kutta-Verfahren)

Beispiel 1 zum Euler-Verfahren zur numerischen Lösung von linearen

Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = f(x, y)$

Differentialgleichung : $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = 2y + x$ (inhomogene Differentialgleichung)

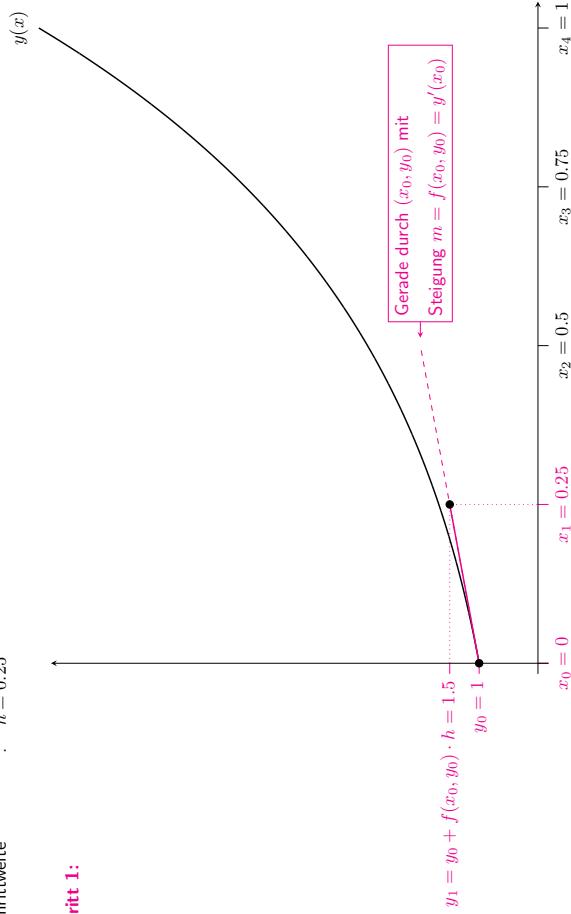
Anfangswert : $y(0) = 1$

Lösungskurve : $y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

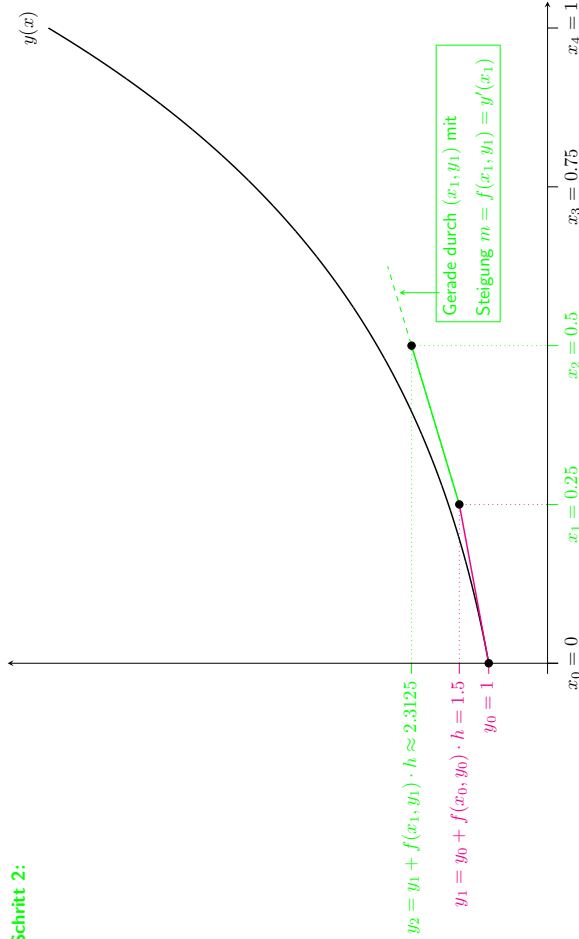
gesucht : Näherungswert für $y(1)$ mit dem Euler-Verfahren

Schrittweite : $h = 0.25$

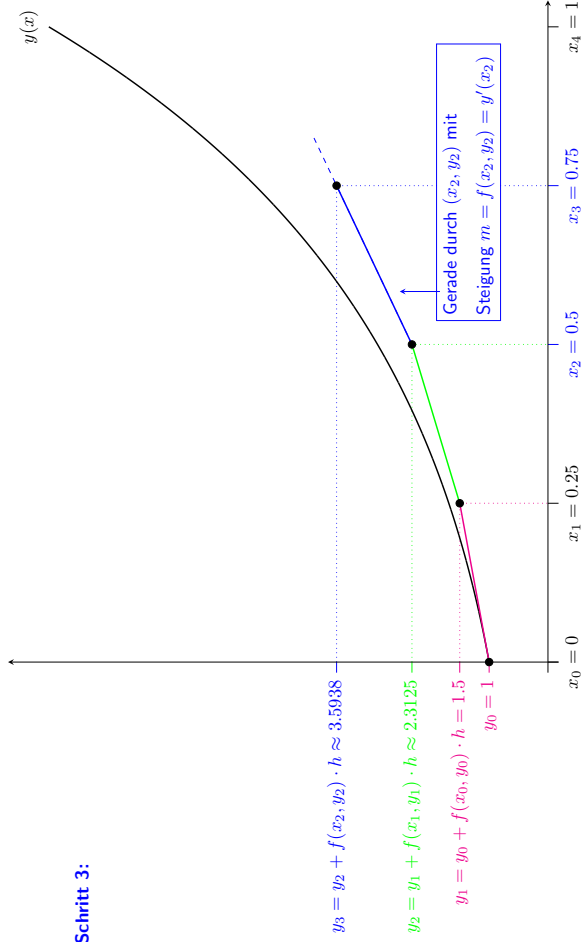
Schritt 1:



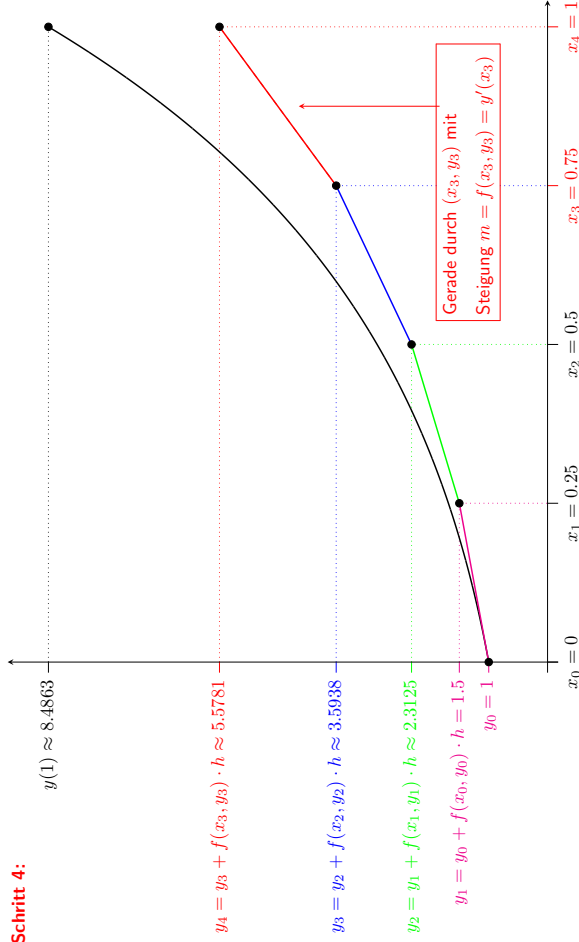
Schritt 2:



Schritt 3:



Schritt 4:



Vergleich zwischen Euler-Verfahren und Verfahren von Heun zur numerischen Lösung von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = f(x, y)$

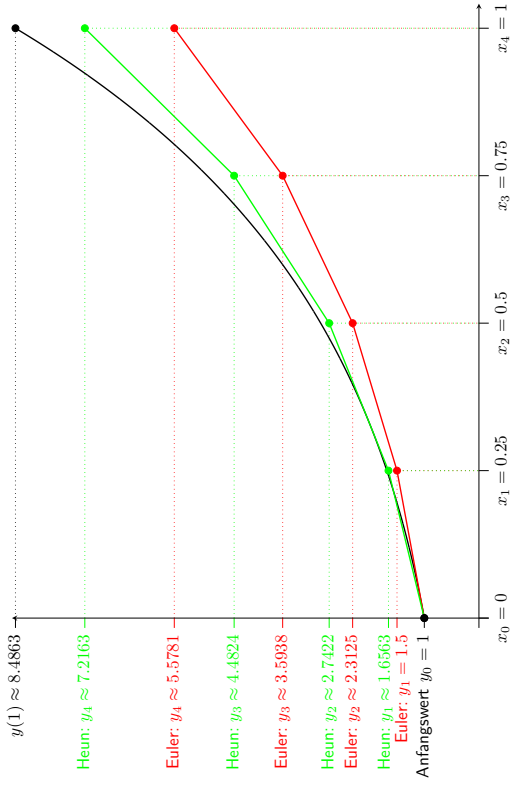
Differentialgleichung : $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = 2y + x$ (inhomogene Differentialgleichung)

Anfangswert : $y(0) = 1$

Lösungskurve : $y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

gesucht : Näherungswert für $y(1)$ mit dem **Euler-Verfahren** bzw. **Verfahren von Heun**

Schrittweite : $h = 0.25$



Beispiel 3 zum Euler-Verfahren

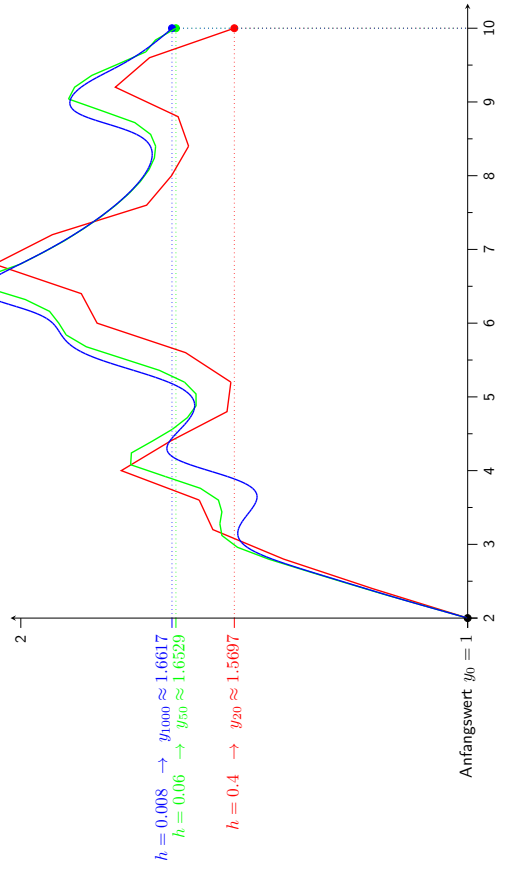
Differentialgleichung : $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = \cos\left((\sin(x)\cos(y) + \sqrt{2xy})\sin^2(xy)\right)$

Anfangswert : $y(2) = 1$

Lösungskurve : Funktionsgleichung rechnerisch nicht bestimmbar

gesucht : Näherungswert für $y(10)$ mit dem Euler-Verfahren

Schrittweite : $h = 0.4$ bzw. $h = 0.06$ bzw. $h = 0.008$



Beispiel 2 zum Euler-Verfahren zur numerischen Lösung von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = f(x, y)$

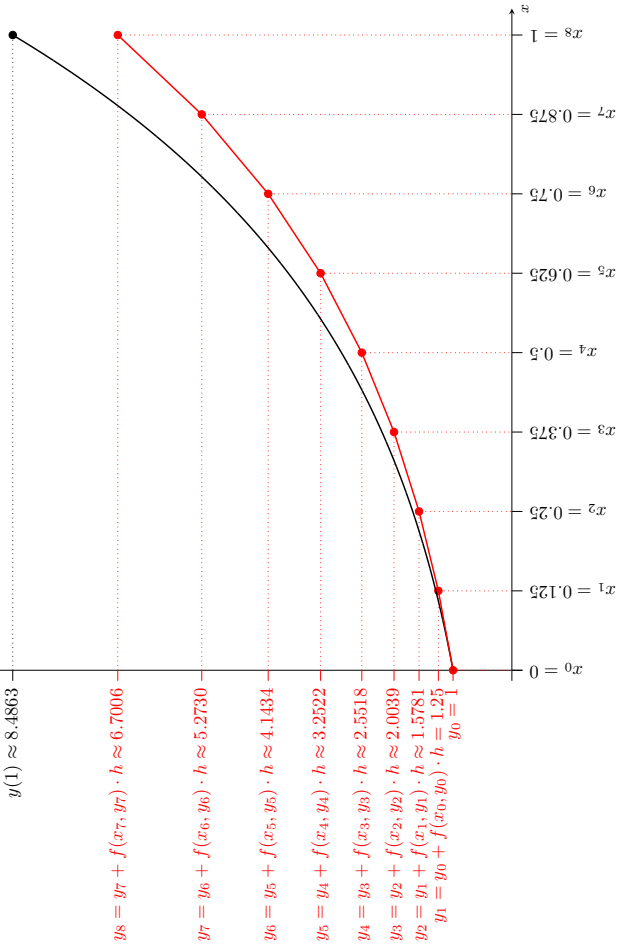
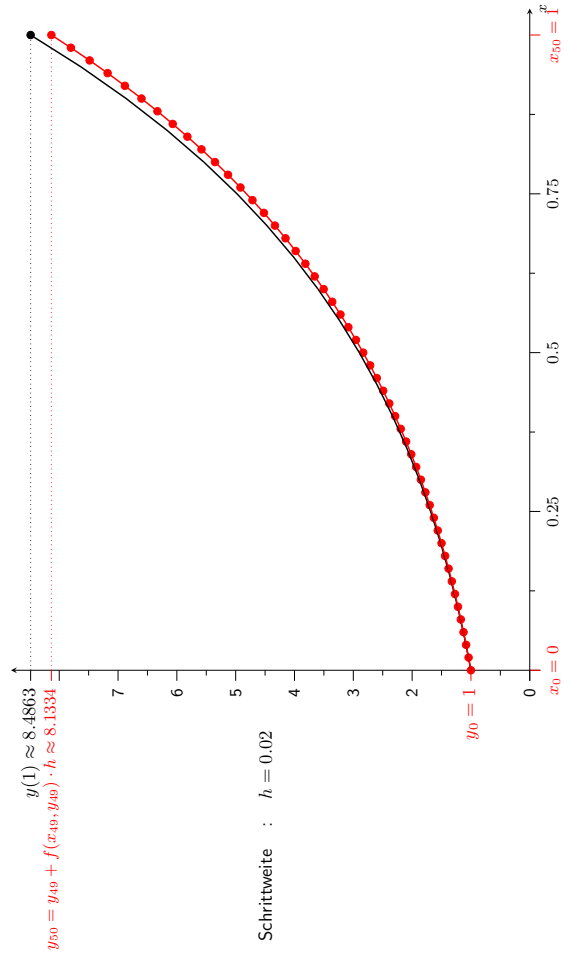
Differentialgleichung : $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = 2y + x$ (inhomogene Differentialgleichung)

Anfangswert : $y(0) = 1$

Lösungskurve : $y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

gesucht : Näherungswert für $y(1)$ mit dem Euler-Verfahren

Schrittweite : $h = 0.125$



Vergleich zwischen Euler-Verfahren und Verfahren von Heun zur numerischen Lösung von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = f(x, y)$

Differentialgleichung : $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = \cos(x)y + e^{\sin(x)}$ (inhomogene Differentialgleichung)
Anfangswert : $y(0) = 0$
Lösungskurve : $y(x) = xe^{\sin(x)}$
gesucht : Näherungswert für $y(5) \approx 1.9165$ mit dem **Euler-Verfahren** bzw. **Verfahren von Heun**
Schrittweite : $h = 1$

