

Inhaltsübersicht zur Vorlesung am 28.01.2016

9 Approximation von Funktionen

(Fortsetzung der Vorlesung vom 14.01.2016)

Definition 9.5.5: Fourierpolynom

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

vom Grad $n \in \mathbb{N}$ zu einer stückweise stetigen, periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Fourierkoeffizienten a_k und b_k

Wiederholung: gerade/ungerade Funktionen, Produkte gerader/ungerader Funktionen, bestimmte Integrale gerader/ungerader Funktionen über Integrationsintervallen $[-a, a]$ für $a > 0$

Satz 9.5.6: Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so folgt $b_k = 0$ für $k = 1, 2, \dots, n$, und ist $f(x)$ ungerade, so folgt $a_k = 0$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

Definition 9.5.7: Fourierreihe

Satz 9.5.8: Konvergenzsatz

Beispiel 9.5.9: Berechnung der Fourierkoeffizienten zu folgenden Funktionen:

(a) $f(x) := \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ Lösung: $a_k = 0, k \in \mathbb{N}_0; \quad b_k = \begin{cases} 0 & , \quad \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & , \quad \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}, k \in \mathbb{N}$

(b) $f(x) := \frac{1}{\pi^3}(x - \pi)^2$ für $x \in [0, 2\pi)$ Lösung: $a_0 = \frac{2}{3\pi}; \quad a_k = \frac{4}{\pi^3 k^2}, k \in \mathbb{N}; \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N}$

(c) $f(x) := \frac{2}{\pi^3} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2$ für $x \in [0, 2\pi)$ Lösung: $a_0 = \frac{2}{3\pi}; \quad a_k = \frac{4}{\pi^3 k^2}, k \in \mathbb{N}; \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N}$

(d) $f(x) := x + \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $x \in [-\pi, \pi)$ Lösung: $a_0 = \sqrt{2}; \quad a_k = 0, k \in \mathbb{N}; \quad b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, k \in \mathbb{N}$

(e) $f(x) := \begin{cases} e^x & , \quad x \in [-\pi, 0] \\ 0 & , \quad x \in [0, \pi) \end{cases}$ Lösung: $a_0 = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}; \quad a_k = \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{\pi(k^2 + 1)}, \quad b_k = \frac{(-1)^k k e^{-\pi} - k}{\pi(k^2 + 1)}, k \in \mathbb{N}$

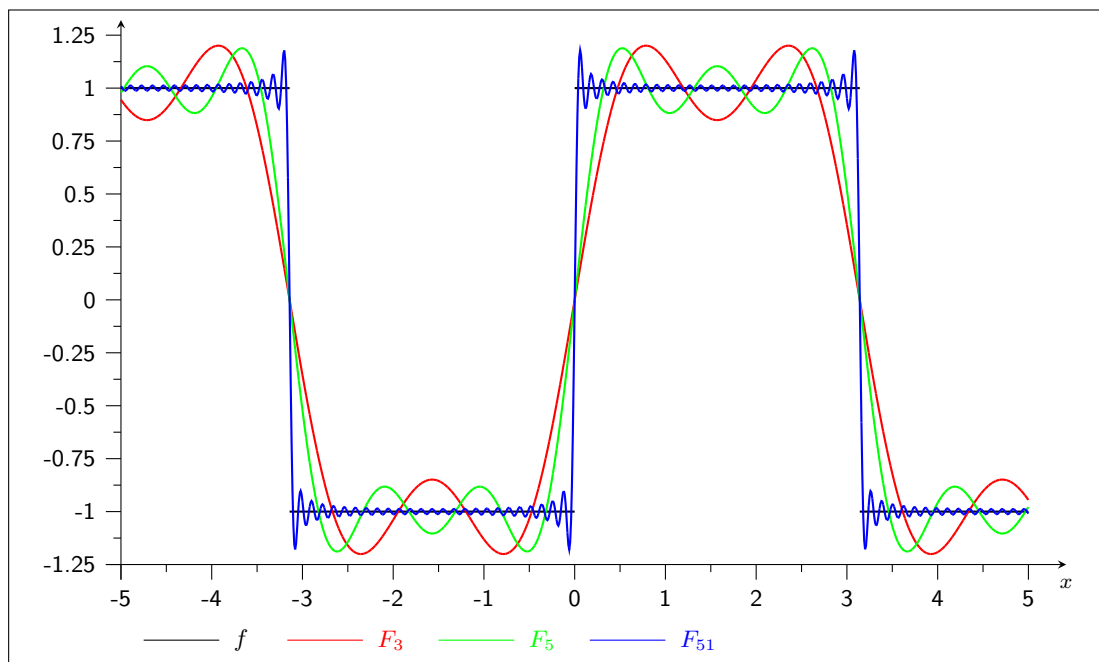


Abb. 1: Die Funktion f aus Beispiel 9.5.9 (a) und einige Fourierpolynome F_n zu f .

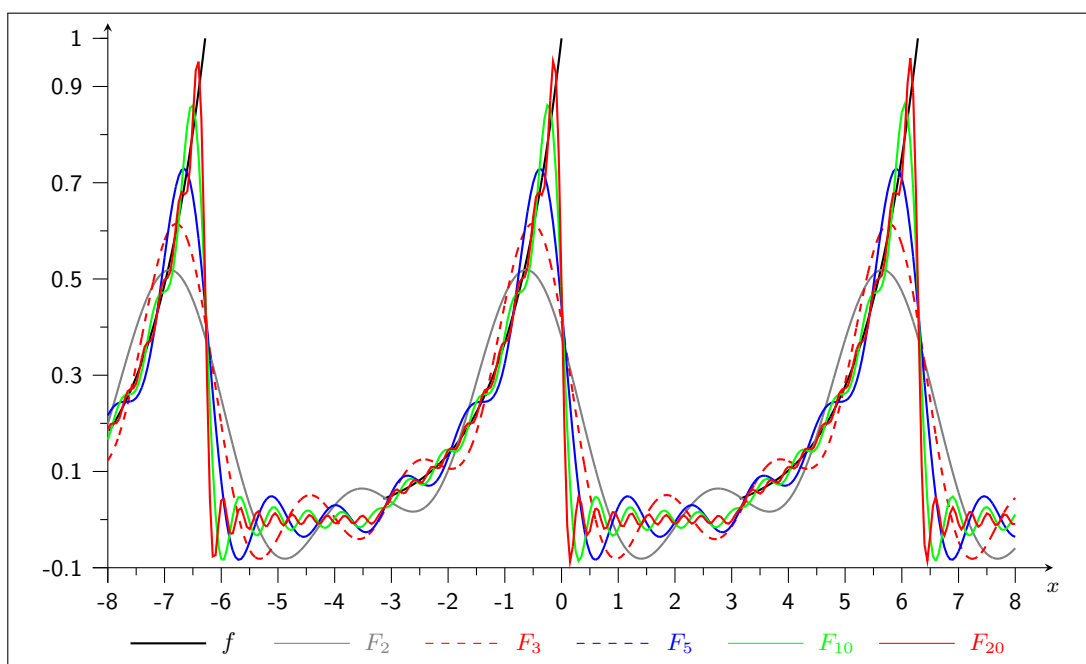


Abb. 2: Die Funktion f aus Beispiel 9.5.9 (e) und einige Fourierpolynome F_n zu f .