Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 1 - Abgabe bis Dienstag, 20.10.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H1.1 (4 Punkte)

Wir sind im Arbeitszimmer der Krimiautorin Ilse Ungleich. Der Schreibtisch ist mehr Wert als die (im Prinzip nur aus einer Glühbirne mit Fassung bestehende) Deckenleuchte und der recht antiquierte Computer (Baujahr 1993) zusammen. Zudem sind der Bürostuhl und der Computer gemeinsam mehr wert als die Deckenleuchte und der Schreibtisch. Die Deckenleuchte und der Bürostuhl haben jedoch zusammen denselben Wert wie der Schreibtisch und der Computer.

(a) Ordnen Sie jedem Gegenstand das richtige Symbol zu, so dass folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} Z &> X + W \\ Y + X &> W + Z \\ Z + X &= W + Y \end{aligned}$$

(b) Wie lassen sich diese vier Gegenstände gemäß ihrer Wertverhältnisse ordnen?

Aufgabe H1.2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig sind (mit Begründung):

(a) $x^2 < 16 \;\Rightarrow\; x < 4$

(b) $x^2 > 4 \;\Rightarrow\; x > 2$

(c) $x = 7 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 49$

(d) $\dfrac{x-1}{x-2} = 0 \;\wedge\; x \neq 2 \;\Leftrightarrow\; x = 1$

Aufgabe H1.3 (5 Punkte)

(a) Seien X und Y nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, und es gelte $x > y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Gibt es dann stets ein $z \in \mathbb{R}$, so dass $x > z > y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
Hinweis: O.B.d.A. dürfen Sie für den Beweis $0 \leq a \leq b \leq c$ voraussetzen. Überlegen Sie anschließend, ob Ihr Beweis auch für negative a, b, c gültig ist!

(Aufgaben H1.4 bis H1.6 - siehe Seite 2)

Aufgabe H1.4 (12 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \geq 2$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{n!-1}{n!}$.

(b) $a_n := 5^{2n} + 24n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 24 teilbar.

(c) $a_n := 3^{n-1} - 2$ ist für alle durch 4 teilbaren $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

(d) Für alle $n \geq 8$ gilt $3^n > n^4$.

Aufgabe H1.5 (5 Punkte)

Der Brauchwasserspeicher einer Papierfabrik ist zum Arbeitsbeginn um 6:00 Uhr nur noch zu 50 % gefüllt. Deshalb schaltet man um 6:00 Uhr eine Förderpumpe an, die neues Wasser zuführt. Der (*stets kontinuierliche*) Verbrauch des Wassers im Produktionsprozess der Fabrik ist allerdings so hoch, dass trotz des Wassernachschubs der Speicherinhalt um 7:00 Uhr auf 35 % des maximalen Fassungsvermögens abgesunken ist. Daher schaltet man nun eine weitere, gleich starke Förderpumpe ein. Der Speicher füllt sich daraufhin bis 12:00 Uhr auf 80 % des Fassungsvermögens (*bei stets gleichem Wasserverbrauch*).

(a) Angenommen um 12:00 Uhr werden beide Pumpen abgeschaltet: Nach welcher Zeit wäre der Speicher leer?

(b) Wieviel Zeit benötigt eine Pumpe, um den leeren Speicher vollständig zu füllen, wenn kein Wasser entnommen wird?

Aufgabe H1.6 (5 Punkte)

Bildungsminister Naseweis-Neunmalklug von der „Partei der sorg- und kompromisslosen Mathemuffel (PSKM)“ möchte das Bildungssystem revolutionieren. Erster Schritt dazu ist die gesetzlich geregelte Abschaffung des Matheunterrichts. Grundlage dieses Plans: Minister Naseweis-Neunmalklug höchst persönlich hat entdeckt, dass alle Zahlen gleich sind! Das macht natürlich nach seiner Auffassung Mathematik gänzlich überflüssig. Die von Arbeitslosigkeit bedrohten Mathelehrer laufen kopfschüttelnd Sturm gegen diese Pläne. Nach Meinung des Ministers ist der Protest nicht berechtigt, denn er bringt für seine Behauptung drei alternative Beweise:

- Beweis 1: Es gilt $36 - 66 = 25 - 55$. Dies ist äquivalent zu $6^2 - 6 \cdot 11 = 5^2 - 5 \cdot 11$. Addition von $\left(\frac{11}{2}\right)^2$ auf beiden Seiten der Gleichung liefert

  $$6^2 - 6 \cdot 11 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 5^2 - 5 \cdot 11 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(6 - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{11}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - \frac{11}{2} = 5 - \frac{11}{2}$$

  Addition von $\frac{11}{2}$ liefert $6 = 5$, durch Subtraktion von 5 folgt $1 = 0$. Durch Multiplikation der Gleichung $1 = 0$ mit beliebigen Zahlen a und b folgt dann $a = 0$ und $b = 0$. Daraus folgt dann $1 = a = b$. Damit ist bewiesen, dass alle Zahlen gleich sind.

- Beweis 2: Seien a und b zwei beliebige reelle Zahlen. Angenommen die Behauptung wäre falsch, d.h. es würde $a \neq b$ gelten. Wir unterscheiden vier Fälle:
  - Fall 1: Es gilt $0 \leq a < b$. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $a + c = b$.
  - Fall 2: Es gilt $0 \geq a > b$. Dann gibt es ein $c < 0$ mit $a + c = b$.
  - Fall 3: Es gilt $a < 0$ und $b > 0$. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $a + c = b$.
  - Fall 4: Es gilt $a > 0$ und $b < 0$. Dann gibt es ein $c < 0$ mit $a + c = b$.

In allen vier Fällen liefert die Multiplikation der Gleichung $a + c = b$ mit $b - a$:

$$\begin{aligned} & (a+c)(b-a) &=& \; b(b-a) \\ \Leftrightarrow \quad & ab + cb - a^2 - ac &=& \; b^2 - ba \end{aligned}$$

Subtraktion von cb liefert

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & ab - a^2 - ac &=& \; b^2 - ba - cb \\ \Leftrightarrow \quad & a(b-a-c) &=& \; b(b-a-c) \end{aligned}$$

Nach Division von $b - a - c$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$a \;=\; b\,.$$

Also sind die (beliebig gewählten) Zahlen a und b im Widerspruch zur Annahme stets gleich.

- Beweis 3: Mittels vollständiger Induktion: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.
  - Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial, denn eine einelementige Zahlenmenge enthält nur gleiche Zahlen.
  - Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
  - Induktionsschritt: Gegeben seien $n + 1$ Zahlen $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

    $$a_1 \;=\; a_2 \;=\; \ldots \;=\; a_n$$

    und

    $$a_2 \;=\; a_3 \;=\; \ldots \;=\; a_{n+1}\,,$$

    Daraus folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1}$.

Da die PSKM im Regierungskabinett die Mehrheit hat, wird das Gesetz gegen alle Prosteste durchgesetzt. Die Gewerkschaft der Mathelehrer klagt gegen das Gesetz.

Stellen Sie sich vor, das Gericht würde Sie als Gutachter bestellen. Welche Empfehlung würden Sie den Richtern geben? Sind die angegebenen Beweise richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten!