

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Dienstag, 03.11.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H3.1 (7 Punkte)

Seien A, B nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$. Begründen Sie insbesondere auch, warum die Menge $A \cup B$ keine kleinere obere Schranke als $\max(\sup(A), \sup(B))$ hat.
- (b) Weisen Sie nach, dass $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$ für $A \cap B \neq \emptyset$ gilt.
- (c) Geben Sie ein Beispiel nicht disjunkter Mengen A, B reeller Zahlen an, für die $\sup(A \cap B) \neq \min(\sup(A), \sup(B))$ gilt.

Aufgabe H3.2 (9 Punkte)

Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus-Senftenberg, Wintersemester 2014/15

Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{R}$ Infimum und Supremum der Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{2x-1}{\sqrt{3}x-1} < \sqrt{3}x+1, \quad x < \sqrt{3} \right\}.$$

Hat M in $\mathbb{R}$ ein Minimum und Maximum? Was ändert sich, wenn Sie die Menge M über dem Körper $\mathbb{Q}$ betrachten?

(Hinweise: Fallunterscheidung bei der Lösung der Ungleichung. Es gilt $\sqrt{3} \approx 1.7321$ und $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$.)

Aufgabe H3.3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

monoton und beschränkt ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe H3.4 (7 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Sind die Folgen konvergent? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $a_n = \frac{2-3n^2}{(2-3n)^2}$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$

(Aufgabe H3.5 siehe Seite 2)

Aufgabe H3.5 (9 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n}{3n^2 + 1} = \frac{4}{3}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n^3 + 3(-1)^n} = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{n} \neq -1$