

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 10.11.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H4.1 (15 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls sie existieren:

$$(a) \quad a_n = \left(\frac{5n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 8n - 2} + \frac{4n^8 - n^6 + 2n^4 + (-1)^n}{8n^3 + 5n^5 - 7n^7 - 3n^8} + \frac{16n^2 - 7}{6n^2 + n - 2} \right)^3$$

$$(b) \quad a_n = \frac{5n^5 + 7^n}{5^n - n^2}$$

$$(c) \quad a_n = \frac{3^n}{2^{2n}}$$

$$(d) \quad a_n = \frac{\sqrt[n]{7n!}}{(2n)!}$$

$$(e) \quad a_n = \sqrt{2n^2 + 2n} - \sqrt{2n^2 + \sqrt{n^2 + 3n + 2}}$$

$$(f) \quad a_n = \frac{\sin(n^8\pi - n^9)}{n}$$

Aufgabe H4.2 (10 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass für alle $x \in [0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})]$ die Ungleichung $x^2 - x \leq 3$ erfüllt ist. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $x \in [0, 1)$ und $x \in [1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})]$.

(b) Verwenden Sie (a), um nachzuweisen, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für jedes $a_0 \in [0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})]$ gegen $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ konvergiert. Zeigen Sie dazu unter anderem durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}).$$

(Hinweis: Verwenden Sie für den Nachweis von $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ die Tatsache, dass

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}) + 3 = \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})\right)^2$$

gilt.)

Aufgabe H4.3 (3 Punkte)

Zu einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existieren reelle Zahlen S und W mit $0 < S \leq a_n \leq W$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ gilt.

Aufgabe H4.4 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{c + a_n}{1 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

für beliebiges $c \in (1, 4)$ eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie ihren Grenzwert.