

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Dienstag, 17.11.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H5.1 (19 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf die Existenz von Häufungspunkten, und geben Sie ggf. alle Häufungspunkte und die dazugehörigen Teilfolgen an.

(a) $a_n = (2 + (-1)^n) \cdot \frac{3n^2 + 2n - 1}{2 + n - 8n^2}$

(b) $a_n = (1 + (-2)^{-n}) \cdot \left(2 + \frac{3^n + 1}{7^n + 3}\right)$

(c) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = (-1)^n \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \in \mathbb{N}_0$

(d) $a_0 = 4, a_1 = 5, a_{n+2} = (-1)^n \frac{a_{n+1}}{\min(a_n, a_{n+1})}, n \in \mathbb{N}_0$

(e) $a_n = \left(-3n - 9 \left\lfloor -\frac{n}{3} \right\rfloor\right) \cdot c_n$, wobei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine divergente Folge ist mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{4k} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{4k+2} = -1.$$

Aufgabe H5.2 (4 Punkte)

Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus-Senftenberg, Wintersemester 2014/15

Die Glieder einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien auf $m \in \mathbb{N}$ konvergente Teilfolgen aufgeteilt, d.h. die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die m konvergenten Teilfolgen

$$(a_{n_{1,k}})_{k \in \mathbb{N}}, (a_{n_{2,k}})_{k \in \mathbb{N}}, (a_{n_{3,k}})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{n_{m,k}})_{k \in \mathbb{N}},$$

mit $n_{i,k} \in \mathbb{N}$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}$ und folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein Indexpaar (i, k) mit $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n_{i,k}}$.

(ii) Zu jedem Indexpaar (i, k) mit $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n_{i,k}}$.

Welcher Schluss über die Anzahl der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist allgemein zulässig?

- ☐ (a) Die Folge hat genau m verschiedene Häufungspunkte.
- ☐ (b) Die Folge hat mindestens einen und höchstens m verschiedene Häufungspunkte.
- ☐ (c) Die Folge hat weniger als m Häufungspunkte.
- ☐ (d) Die Folge hat keine Häufungspunkte.

Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig bzw. begründen Sie, warum die nicht wählbaren Alternativen falsch sind!

(Aufgaben H5.3 bis H5.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe H5.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Summen mit Hilfe der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe:

(a) $\sum_{n=0}^7 2^n$

(b) $\sum_{n=8}^{14} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Aufgabe H5.4 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{8^k}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^k$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2}{4^{k+1}}$

(d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k-4}}{3^{k+2}}$

Aufgabe H5.5 (5 Punkte)

Gegeben sei ein quadratisches Blech mit einer Seitenlänge von einem Meter. Aus diesem Quadrat wird das mittlere Neuntel herausgeschnitten, anschließend von jedem der verbleibenden acht Neuntel ebenfalls die mittleren Neuntel. Dies läßt sich rekursiv beliebig oft fortsetzen (siehe Skizze). Welche Fläche hat das verbleibende Blech (bzw. alternativ die Summe der herausgeschnittenen Löcher), wenn man die beschriebene Vorgehensweise unendlich oft wiederholt? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch!

