

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 24.11.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H6.1 (4 Punkte)

In einem Kalenderjahr werden jeweils am Monatsende 200 € auf ein zu traumhaften 3 % p.a. verzinstes Konto eingezahlt. Zinsen werden monatlich berechnet, aber gleich wieder abgebucht, so dass es keinen Zinseszins gibt. Welches Guthaben steht am Jahresende zur Verfügung?

Aufgabe H6.2 (5 Punkte)

Ein Bankkunde schließt einen Sparplan ab, bei dem er 30 Jahre lang jeweils zu Beginn des Jahres 1000 € einzahlt und dafür anschließend 30 Jahre lang ebenfalls jährlich zu Jahresbeginn einen bestimmten Betrag ausgezahlt bekommt. Wie hoch ist dieser ausgezahlte Betrag, wenn die Verzinsung mit 2 % p.a. erfolgt? (*Hinweis: Im Unterschied zum in der Übung behandelten Beispiel zur nachschüssigen Rente handelt es sich um eine vorschüssige Rente. Überlegen Sie zunächst, wie die in der Übung hergeleitete Formel abzuändern ist.*)

Aufgabe H6.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert, in dem Sie die Beschränktheit der zugehörigen Partialsummenfolge nachweisen. *Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg gelingt über den Beweis der Behauptung, dass $\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \frac{k}{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.*

Aufgabe H6.4 (12 Punkte)

Stellen Sie für die folgenden Reihen $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ durch Berechnung der k -ten Partialsummen $s_k = \sum_{n=n_0}^k a_n$ (auf mindestens 10 Nachkommastellen genau) für die angegebenen $k \in \mathbb{N}$ eine Behauptung über die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihen auf. Beweisen Sie Ihre Behauptungen anschließend.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n(n+3)!}$, $k = 1, 5, 10, 15, 20$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10-9n}{10n} \right)^n$, $k = 25, 50, 75, 100, 500, 1000$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$, $k = 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000$

(d) $\sum_{n=5}^{\infty} \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+2}$, $k = 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000$

(Aufgabe H6.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe H6.5 (8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{98^{n+2}}$ konvergiert.
- (b) Verifizieren Sie mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+55}}{9^{n! - 2}}$ konvergiert.
- (c) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_0 := 99$ und $a_{n+1} := \frac{4n^3 - n + 5}{9 + 8n^2 - 5n^3} \cdot a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ konvergent?
- (d) Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2)!}{n}$ divergiert.