Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 01.12.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H7.1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden beiden Reihen mit dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen auf Konvergenz. Sind die Reihen auch absolut konvergent?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-5} \frac{(n-6)^2}{e^n}$

Hinweis zu (b): Rechnen Sie zunächst näherungsweise einige Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n := \frac{(n-6)^2}{e^n}$ *aus (z.B. für* $n = 1, 2, \ldots, 15$*), um eine Vermutung über das Monotonieverhalten der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zu erhalten. Hilfreich kann zur Bearbeitung von (b) auch die Tatsache sein, dass* $e^n > n^3$ *für alle* $n \geq 5$ *gilt, was Sie ohne Beweis verwenden dürfen.*

Aufgabe H7.2 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung der Summanden:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3 - k}$

Hinweis zu (b): Betrachten Sie die Partialsummenfolge, formen Sie die Partialsumme geeignet um, und betrachten dann den Grenzwert für $n \to \infty$*.*

Aufgabe H7.3 (17 Punkte)

(a) Zu jeder reellen Zahl x mit $0 < x < 1$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass x in einen b-adischen Bruch $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$ entwickelt werden kann. Entwickeln Sie $x = \frac{3}{5}$ in einen b-adischen Bruch für $b = 2, 3$.

(b) Im Computer ist es unmöglich, reelle Zahlen als unendliche 2-adische Brüche darzustellen. Daher verwendet man die Gleitkomma-Darstellung, bei der alle Zahlen mit der selben relativen Genauigkeit dargestellt werden. Der IEEE-Standard (IEEE = Institute of Electrical and Electronics Engineers) verwendet z.B. 64

Bits $(s, e_{10}, e_9, \ldots, e_0, a_1, \ldots, a_{52}) \in \{0,1\}^{64}$ zur Darstellung einer reellen Zahl z. Dabei ist s ein Vorzeichenbit ($s = 1$ für negative, $s = 0$ für positive Zahlen) und $e := \sum_{n=0}^{10} e_n 2^n$ ist ein Exponent mit $0 \leq e \leq 2047$ und es gilt

$$z \;=\; (-1)^s 2^{e-1023} \left(1 + \sum_{k=1}^{52} a_k 2^{-k}\right) \qquad (*)$$

Die Zahlen $a_1, \ldots, a_{52}$ sind dabei so zu bestimmen, dass $1 \leq 1 + \sum_{k=1}^{52} a_k 2^{-k} < 2$ gilt. Bestimmen Sie die 64-Bit-IEEE-Darstellungen der Zahlen $x = -\frac{9}{4}$ und $y = \frac{1}{10}$. Werden die Zahlen x und y exakt dargestellt? Geben Sie für x bzw. y den relativen Fehler an, der durch die Verwendung von $(*)$ entsteht.

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 := \frac{1}{10}, a_1 := \frac{1}{100}$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})$. Berechnen Sie das Folgenglied a_9 durch exakte Rechnung sowie numerisch durch Runden der Folgenglieder a_n auf zwei Nachkommastellen, wobei Sie dann mit diesen Näherungswerten weiterrechnen. Vergleichen Sie die Ergebnisse und interpretieren Sie dies im Hinblick auf die Genauigkeit des numerischen Rechnens allgemein.

(*Hinweis zu (b): Folgern Sie für $x = -\frac{9}{4}$ den relativen Fehler aus Ihren Rechenschritten für die 64-Bit-Darstellung $(*)$. Zur Bestimmung des relativen Fehlers für $y = \frac{1}{10}$ bringen Sie die 64-Bit-Darstellung $(*)$ von y in die Form $\frac{1}{10} \cdot (1 \pm 2^{-p})$ mit $p > 0$.*)