

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 8 - Abgabe bis Dienstag, 08.12.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H8.1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie durch Diskussion des Monotonieverhaltens die angegebenen Funktionen $f : D \rightarrow W$ auf Umkehrbarkeit im angegebenen Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie außerdem den Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ von f an. Falls f umkehrbar ist, dann bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$. (*Hinweis: Lösungen, die ggf. noch aus der Schule bekannte, aber in der Vorlesung noch nicht behandelte Methoden der Differentialrechnung verwenden, werden nicht akzeptiert!*)

(a) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, $D = [2, \infty)$

(b) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, $D = [0, 5]$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$, $D = [2, 10]$

Aufgabe H8.2 (6 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme

• $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

• $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

und ggf. unter Verwendung der Beziehung

• $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

dass die folgenden Gleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

(a) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

(b) $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

(c) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

Aufgabe H8.3 (8 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Menge

$$M := \left\{ -\frac{|\sin(n-1)|}{(-1)^n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum, und geben Sie diese Zahlen ggf. an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2 \cos^2(x) + 4 \cos(x) = -\frac{3}{2}$.

Aufgabe H8.4 (15 Punkte)

- (a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 4i$ und $z_2 = -2 + 3i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$, und stellen Sie die Ergebnisse in der Normaldarstellung $a + ib$ dar.
- (b) Bestimmen Sie die Normaldarstellung aller Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 - 27i = 0$ und zeichnen Sie die Lösungen in die komplexe Zahlenebene ein.
- (c) Berechnen Sie $\sqrt[3]{64(\cos(15^\circ) - i \sin(15^\circ))}$ und stellen Sie die Ergebnisse in der Form $a + ib$ dar.
- (d) Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\sum_{n=8}^{\infty} \left(\frac{i - 3n}{8n + 3i} \right)^{2n}$ auf Konvergenz.