

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 15.12.2015, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H9.1 (9 Punkte)

- (a) Verwenden Sie die Definition der Exponentialfunktion durch die unendliche Reihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ zum Beweis der Ungleichungen

(i) $1 + x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

(ii) $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$.

Hinweis zu (i): Fallunterscheidung bzgl. $x \in \mathbb{R}$ durchführen!

(b) Zeigen Sie, dass $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

(c) Beweisen, dass $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe H9.2 (11 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte (ohne die eventuell bereits aus der Schule bekannte Regel von l'Hospital zu verwenden):

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5}{2x^2 + 2x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{2x^2 + 2x - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x^2+2}{x^3+4x^2+8x+5} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x^2} - \sqrt{2+x^2}}{x^2 - x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4+1}}{\sqrt[3]{27x^6+8}}$

(Aufgaben H9.3 und H9.4 - siehe Seite 2)

Aufgabe H9.3 (8 Punkte)

Gegeben sei die stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 - 1} & , \quad x < -1 \\ \frac{|x|}{x} & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{x-2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{|x-2|}{2x} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) \ , \ \lim_{x \downarrow -1} f(x) \ , \ \lim_{x \uparrow 0} f(x) \ , \ \lim_{x \downarrow 0} f(x) \ , \ \lim_{x \uparrow 1} f(x) \ , \ \lim_{x \downarrow 1} f(x) \ , \ \lim_{x \uparrow 2} f(x) \text{ und } \lim_{x \downarrow 2} f(x) \ .$$

(b) Ist die Funktion in ihren Nahtstellen $x = -1, 0, 1, 2$ stetig? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe H9.4 (11 Punkte)

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition des Funktionsgrenzwertes, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$$

in $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzt werden kann.

(b) Zeigen Sie mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

in $x_0 = 0$ stetig ist. Weisen Sie dazu zuerst nach, dass die Ungleichung $\sqrt{x^2 + 1} - 1 \leq \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Zeigen Sie mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 0 \\ x - 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.