

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 10 - Abgabe bis Dienstag, 05.01.2016, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H10.1 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$.

(a) Erläutern Sie, warum f in $\mathbb{R}$ nicht stetig ist.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ a & , \quad x = -1 \\ b & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Wie müssen die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion in $\mathbb{R}$ stetig ist?

Aufgabe H10.2 (12 Punkte)

Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen $f(x)$:

(a) $f(x) = 2x^3 - 7x^5 + 3x^2 - 2x + 2$

(b) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[5]{x^3}$

(c) $f(x) = \frac{5}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}$

(d) $f(x) = \sin(x) \cdot (8x^2 + e^{5x})$

(e) $f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 1}{e^{5x}}$

(f) $f(x) = \sqrt{\ln(8x^5 \cos(x))}$

Aufgabe H10.3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{für } x < 1 \\ 2ax^2 + 3bx + 3 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig und einmal stetig differenzierbar ist.

(Aufgaben H10.4 bis H10.7 - siehe Seite 2)

Aufgabe H10.4 (8 Punkte)

Das Weg-Zeit-Profil eines Radfahrers für eine Zeitdauer von 30 Minuten werde durch folgende Funktion beschrieben (Zeit t in s , Weg w in m):

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{240}t^2 & , \quad t \in [0, 600) \\ 5t - 1500 & , \quad t \in [600, 900) \\ -\frac{1}{600}t^2 + 8t - 2850 & , \quad t \in [900, 1800] \end{cases}$$

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit über die gesamte Strecke. Zu welcher Zeit ist die Momentangeschwindigkeit 2 m/s , 4 m/s bzw. 5 m/s ? Zu welcher Zeit ist die Momentangeschwindigkeit gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit? (*Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*)

Aufgabe H10.5 (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \ln(h(x)) ,$$

wobei die Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$h(x) := 4 - |2x + 4| .$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie die Nullstellen von f . Ist die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar? Geben Sie die erste Ableitung von f in allen Punkten aus D an, in denen f differenzierbar ist. Bestimmen Sie außerdem durch Diskussion des Monotonieverhaltens von f die Koordinaten und die Art aller lokalen Extremstellen von f .

Aufgabe H10.6 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \cdot (\ln(x))^2$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen, Koordinaten und Art der lokalen Extremwerte und Wendepunkte der Funktion f . Diskutieren Sie außerdem das Monotonieverhalten von f mit Hilfe der ersten Ableitung f' .

Aufgabe H10.7 (6 Punkte)

Scheich Habenichts will in der Sahara nach Wasser bohren. Sollte dieses Vorhaben eventuell erfolgreich sein, dann will er das Wasser fördern und für Trinkwasserzwecke aufbereiten. Wegen der voraussichtlich hohen Kosten versucht er herauszufinden, in welchem Abstand x (in Längeneinheiten [LE]) die Bohrlöcher eingebracht werden müssen, um die Kosten pro Tonne geförderten und aufbereiteten Wassers zu minimieren. Dabei sind folgende Rahmenbedingungen zu beachten:

- (a) Je größer der Abstand x zwischen zwei Bohrstellen ist, desto geringer fallen die durchschnittlichen reinen Bohrkosten k_B (in Geldeinheiten pro Tonne [GE/t]) aus (und umgekehrt).
- (b) Die durchschnittlichen Bohrkosten k_B pro t geförderten Wassers lauten in Abhängigkeit vom Abstand x zwischen zwei Bohrstellen:

$$k_B = k_B(x) = \frac{3000}{x^2}$$

- (c) Mit zunehmenden Bohrabstand zwischen zwei Bohrstellen steigen die Kosten k_W (in GE/t) für die Wassergewinnung, da die genaue Lokalisierung der Wasserstellen ungenauer wird und außerdem die Aufbereitung des Wassers schwieriger wird. Für die pro Tonne geförderten Wassers durchschnittlich anfallenden Gewinnungs- und Aufbereitungskosten k_W gilt

$$k_W = k_W(x) = 6000 \cdot \exp\left(-\frac{2}{x^2} + 1\right) + 225$$

- (d) Die gesamten Förderkosten k (pro Tonne geförderten und aufbereiteten Wassers) setzen sich additiv aus den Bohrkosten k_B und k_W zusammen.

Bei welchem Bohrabstand sind die durchschnittlichen gesamten Förderkosten (pro Tonne Wasser) minimal?



Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2016
wünschen die Mitarbeiter des Lehrstuhls für Numerische und Angewandte Mathematik.