

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 11 - Abgabe bis Dienstag, 12.01.2016, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H11.1 (11 Punkte)

- (a) Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ mit $F(x) := f(x)^{g(x)}$. (*Hinweis: Für alle $z > 0$ gilt $z = e^{\ln(z)}$!.*)
- (b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f(x) = 5^{2x^2-1} \quad , \quad g(x) = (4x^2 - 1)^{\sin(x)} \quad , \quad h(x) = (5x + 1)^{\ln(-x^2+2x+3)}$$

Aufgabe H11.2 (9 Punkte)

Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus-Senftenberg, WS 2014/15

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - x + 1}{x^2 + 3} & , \quad x \leq 1 \\ \frac{\sin(10\pi x) \cos(\pi x)}{2\pi(1 - x^4)} & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig ist, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Begründen Sie, warum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ gilt.

Aufgabe H11.3 (12 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 4x)^{\frac{1}{x}}$

Aufgabe H11.4 (9 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die Funktion $f : [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^4}{2 - x^2}$$

bijektiv ist. Geben Sie den Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ von f an, und berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow [0, \sqrt{2})$. Berechnen Sie außerdem den Funktionswert $(f^{-1})'(y_0)$ der ersten Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 = 1$

- (a) durch direktes Einsetzen von y_0 in f^{-1}
- (b) sowie durch Verwendung des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Hinweis: Bei der Auflösung der Gleichung $f(x) = y$ nach x entsteht als Zwischenschritt eine Gleichung der Form $h(x) = 0$, wobei h ein Polynom vom Grad 4 ist. Lösen Sie diese Gleichung durch eine geeignete Substitution, und überlegen Sie, welche der erhaltenen Lösungen von Interesse ist.