

# Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

## Übungsblatt 12 - Abgabe bis Dienstag, 19.01.2016, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

### Aufgabe H12.1 (9 Punkte)

Durch einen Betriebsunfall in einem Chemie-Werk an der Elbe gelangt eine umweltschädliche Chemikalie in den Fluss. An einer ausgewählten Stelle stromabwärts wurde die Konzentration  $c$  (in  $\mu\text{g/l}$ ) des Gefahrstoffes gemessen. Dabei stellte sich heraus, dass die Konzentration  $c$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Tagen) durch folgende Funktion beschrieben werden kann:

$$c = c(t) = \sqrt{44t + 3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

- (a) Die Messungen haben zur Zeit  $t = 0$  begonnen. Wie viele Stunden zuvor war das Wasser an der Messstelle noch unbelastet?
- (b) Nach welcher Zeit (in Stunden seit Beginn der Messung) war die Konzentration maximal?
- (c) Nach wieviel Stunden war die Konzentration auf 25 % des Maximalwertes gesunken?

### Aufgabe H12.2 (4 Punkte)

Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus-Senftenberg, WS 2014/15

Eine Potenzreihe hat allgemein die Gestalt  $\sum a_n(x - x_0)^n$  mit einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und einer Entwicklungsstelle  $x_0$ , die den Mittelpunkt des Konvergenzintervalls  $(x_0 - R, x_0 + R)$  angibt. Bestimmen Sie die Entwicklungsstelle  $x_0$  und den Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (2x - 1)^{n-2}$$

### Aufgabe H12.3 (16 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = xe^{2x}.$$

- (a) Leiten Sie eine Formel für die  $n$ -te Ableitung von  $f$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  her, und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.
- (b) Geben Sie die Taylorreihen  $T(x)$  zu  $f$  um die Entwicklungspunkte  $x_0 = 0$  bzw.  $x_0 = 1$  an. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren die Taylorreihen?
- (c) Nach Definition 7.42 und Satz 7.44 aus der Vorlesung existiert zu einer  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0, x \in [a, b]$  ein  $c \in (x_0, x)$  (falls  $x_0 < x$  bzw.  $c \in (x, x_0)$ , falls  $x_0 > x$ ) mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=: T_n(x_0, x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{=: R_n(x_0, x)}.$$

Geben Sie das Taylorpolynom  $T_3(x_0, x)$  dritten Grades zu  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  bzw. um  $x_0 = 1$  an. Schätzen Sie (rechnerisch) jeweils das Restglied  $R_3(x_0, x)$  für  $x \in [-1, 2]$  betragsmäßig nach oben ab. Schätzen Sie dazu  $|f^{(4)}(c)|$  und  $|(x - x_0)^4|$  für  $x \in [-1, 2]$  nach oben ab.

- (d) Berechnen Sie den maximalen Fehler  $f(x) - T_3(x_0, x)$  für  $x \in [-1, 2]$  numerisch, indem Sie die Funktion  $\max(|f(x) - T_3(x_0, x)|)$  für  $x_0 = 0$  bzw.  $x_0 = 1$  jeweils auf einem sehr feinen Gitter auswerten. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil (c).

**Aufgabe H12.4** (10 Punkte)

Ein Handwerksbetrieb hat im Jahr 2003 die Archivierung seiner Kunden- und Umsatzen auf ein elektronisches System umgestellt. Der ausschließlich für diese Zwecke angeschaffte PC hat eine Festplatte mit einem maximalen Speichervolumen von 234 GB, einmal gespeicherte Daten werden nicht mehr gelöscht. Zwölf Jahre nach dem Start des elektronischen Verwaltungssystems sind bereits 102 GB des Speichers belegt, und das Datenvolumen wächst mit einer Geschwindigkeit von 1536 MB/a (a: Jahr). Die Wachstumsgeschwindigkeit wächst ihrerseits um  $524288 \text{ KB/a}^2$ .

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel näherungsweise die Größe der gespeicherten Datenmenge (in GB), die voraussichtlich nach weiteren fünf bzw. zehn Jahren auf der Festplatte insgesamt vorhanden sein werden.
- (b) Auch die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit ist nicht konstant, denn auch sie unterliegt Schwankungen in Angebot und Nachfrage. Es kann aber angenommen werden, dass sie sich im Zeitraum von fünf Jahren um nicht mehr als  $65536 \text{ KB/a}^3$  bzw. in den nächsten zehn Jahren um nicht mehr als  $65536 \text{ KB/a}^3$  ändert. Schätzen Sie unter diesen Annahmen den Fehler der Ergebnisse aus (a) für die genannten Zeiträume ab. Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Es gilt  $1 \text{ GB} = 1024 \text{ MB} = 1048576 \text{ KB} = 1073741824 \text{ Byte}$  bzw.  $1 \text{ MB} = 1024 \text{ KB} = 1048576 \text{ Byte}$ .