

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 14 - Abgabe bis Dienstag, 02.02.2016, 13:45 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe H14.1 (9 Punkte)

Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus-Senftenberg, WS 2014/15

Gegeben sei die stückweise definierte, für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 3x \cos(x) & , \quad x < 0 \\ \sin(3x) \cdot \exp(\cos(3x) - 1) & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob f in $x = 0$ differenzierbar ist, geben Sie die erste Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, und bestimmen Sie eine stetige und differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (*Hinweis zur Berechnung von F : Partielle Integration für $x < 0$, Integration mit geeigneter Substitution für $x > 0$.*)

Aufgabe H14.2 (11 Punkte)

(a) Verwenden Sie die Substitution $z = \sqrt{x^2 + 1}$ zur Berechnung von $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$.

(b) Berechnen Sie $\int \frac{2x^4 - 4x - 1}{x^3 - x} \, dx$ durch Partialbruchzerlegung des Integranden.

(c) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

existiert, und bestimmen Sie ggf. dessen Wert.

Aufgabe H14.3 (5 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die angegebenen Funktionen $y(x)$ Lösungen der jeweiligen Differentialgleichungen auf $I \subseteq \mathbb{R}$ sind:

(a) $y' + 4xy - 8x = 0$; $y(x) = ce^{-2x^2} + 2$ auf $I = \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

(b) $y' = xy^2$; $y(x) = \frac{2}{2-x^2}$ auf $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $c \in \mathbb{R}$

(c) $y'' + y = 0$, $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ auf $I = \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y'' - y = 0$, $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ auf $I = \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(e) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(x) = c_1 x + c_2 x^2$ auf $I = \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(Aufgaben H14.4 bis H14.6 siehe Seite 2)

Aufgabe H14.4 (6 Punkte)

Gegeben sei für die Funktion $y = y(x)$ die lineare Differentialgleichung (DGL)

$$y' \cdot y = 1, \quad y \neq 0.$$

- (a) Zeichnen Sie in den in Abbildung 1 dargestellten Ausschnitt des Richtungsfeldes der DGL qualitativ die Lösungskurven ein, die den Anfangswerten $y(1) = -2$, $y(1) = 2$ bzw. $y(0) = 0$ genügen.
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL nach der Methode der Trennung der Variablen.

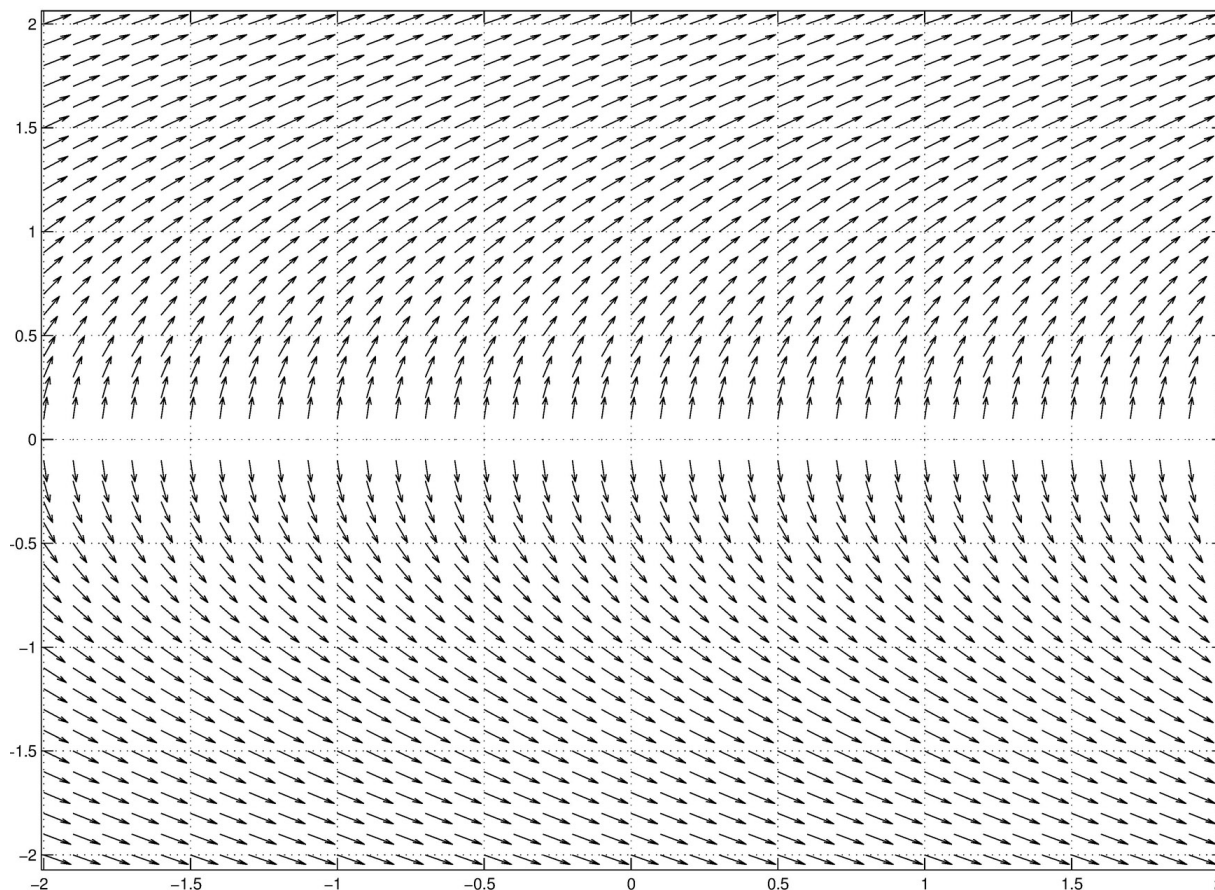


Abb. 1: Richtungsfeld zur DGL $y'y = 1$.

Aufgabe H14.5 (6 Punkte)

Gegeben sei für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$xy' - \frac{e^{y-2}}{x} = 0.$$

- (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- (b) Geben Sie die Lösung für das zugehörige Anfangswertproblem mit $y(3) = 2$ an.

Aufgabe H14.6 (5 Punkte)

Ein Tank enthalte 1000 Liter Wasser, in dem anfänglich 50 Kilogramm eines Salzes gelöst seien. Pro Minute mögen 2 Liter der Salzlösung aus dem Tank auslaufen und 2 Liter reines Wasser zulaufen, die durch ein Superrührgerät sofort und vollständig mit der Salzlösung vermischt werden. Wieviel Kilogramm Salz sind t Minuten nach Beginn des Auslaufens noch in dem Tank vorhanden?