

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 15 - Abgabe bis **Montag, 15.02.2016, 12 Uhr** im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 14 ergeben.

Aufgabe H15.1 (11 Punkte)

Gegeben sei die Ungleichung

$$1 \leq \frac{5-x}{x^2-x-2}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ (über dem Körper $\mathbb{R}$).
- (b) Geben Sie $\inf(\mathcal{L})$, $\sup(\mathcal{L})$, $\min(\mathcal{L})$ und $\max(\mathcal{L})$ (über dem Körper $\mathbb{R}$) an, falls diese Zahlen existieren.
- (c) Was ändert sich bei (a) und (b), wenn zusätzlich die Nebenbedingung $x > 0$ betrachtet wird?
- (d) Welche Lösungsmenge L hat die Ungleichung, wenn sie über dem Körper $\mathbb{Q}$ betrachtet wird? Existieren $\inf(L)$ und $\sup(L)$ in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe H15.2 (26 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\frac{9n^2 + 2n - 8 + \cos(n)}{3n^2 - 8n + \sin(n)} \right)^3 - \frac{8n^3 + 8n + 3}{3n^2 - 4n^3}$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{\cos^2(n) - \sin^3(n)}{n^2 - 4n - 1}$$

konvergiert, und geben Sie den Grenzwert an.

- (c) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := \sqrt{a_n} + \frac{a_n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.
- (d) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

- (e) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{(-1)^n n^2 + 2}{2n^2 - 1}.$$

- (f) Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt{2n^2 - n + 2} - \sqrt{2n^2 + n - 1}$ konvergent? Falls ja, dann geben Sie den Grenzwert an.
- (g) Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt{2n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + n - 1}$ konvergent? Falls ja, dann geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe H15.3 (8 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$
- (b) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{5^{k+1}}$
- (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{k+1} + (-3)^k}{10^{k+2}}$

Aufgabe H15.4 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die Reihe :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$$

auf Konvergenz. Weisen Sie dazu zuerst nach, dass

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3+2n}{(n+1)(n+2)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Falls die Reihe konvergiert, dann berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe H15.5 (20 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi n^8\right)}{\sqrt{n^5}}$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n^2 + 7n + 1}{\exp(n)} \right)$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2n} \exp\left(\frac{n^5 - 3n + 7}{n^6 + 2n^2 + 2} \right) \right]^n$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{5n + 1}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot e^{-n^2}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n - 3}{7n + 8} \right)^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2(-1)^n}$

Hinweis: Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz, die Umkehrung gilt nicht!

Aufgabe H15.6 (16 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+4}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2}{x(x+2)} - \frac{3x+4}{(x+2)(x+4)} \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos(x)}{(x - 2\pi)^2}$

Aufgabe H15.7 (9 Punkte)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^3 - 3x - 2} & \text{für } x \leq 3 \\ \frac{e^{x-3} - 1}{4x - 12} & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in D stetig ist und in nicht zu D zugehörigen Punkten aus $\mathbb{R}$ stetig ergänzbar ist.

Aufgabe H15.8 (15 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktionen an und berechnen Sie ihre erste Ableitung.

(a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$

(e) $f(x) := x^3 \cdot e^{2x}$

(b) $f(x) = \exp(x^2)$

(f) $f(x) := \ln(1 + \sqrt{x})$

(c) $f(x) = \ln(\cos(x))$

(g) $f(x) := \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x) + 2}$

(d) $f(x) = \ln |\ln |x||$

Aufgabe H15.9 (6 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := e^{x^2-1} - x^2 + 3$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f .

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion f . Entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Minima oder Maxima handelt und berechnen Sie die Funktionswerte in den Extremstellen.

Aufgabe H15.10 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schätzen Sie das Restglied für $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ betragsmäßig nach oben ab.

Aufgabe H15.11 (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

- (a) Leiten Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für die n -te Ableitung von f her, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.
- (b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe von f ?

Aufgabe H15.12 (15 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (a) $\int_{-1}^1 -x^3 + 3x^2 - x + 3 \, dx$
- (b) $\int_3^{\sqrt{14}} \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \, dx$
- (c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 5} \, dx$
- (d) $\int \sin^2(x) \, dx$
- (e) $\int (\cos(x) \sin(x) - \sin(2x)) \cdot e^{\sin^2(x) + \cos(2x)} \, dx$
- (f) $\int \frac{2x}{x^4 + 1} \, dx$

Aufgabe H15.13 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < 0 \\ 1-x & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

- (a) Weisen Sie nach, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass f nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
- (c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f .

Aufgabe H15.14 (13 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} \frac{164}{25}(x+1) & \text{für } x < 0 \\ (x-2)^2 - \frac{12}{25}(x-2) + \frac{8}{5} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4x}{x^2+1} & \text{für } x > 2 \end{cases}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

- (b) Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ differenzierbar? Geben Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.
- (c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die durch f sowie die Geraden $g(x) = 0$ und $x = 4$ begrenzt wird.

Aufgabe H15.15 (9 Punkte) Prüfungsaufgaben Mathematik IT-3, BTU Cottbus-Senftenberg, Wintersemester 2014/15

- (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x^3 y^4$ mit $y(1) = \sqrt[3]{3}$.
- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{1}{3}xy' = \frac{x^3}{y^4}$ mit $y(2) = \sqrt[5]{120}$.

Aufgabe H15.16 (12 Punkte)

- (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$yy' - (10x + 8)(y^2 + 1) = 0, \quad y > 0, \quad y(0) = 2.$$

- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x^2 - 2x - 8)yy' - (5x - 8)(y^2 + 1) = 0$$

mit $x \in (-2, 4)$, $y \geq 0$ und $y(-1) = 0$. (*Hinweis: Führen Sie nach Trennung der Variablen auf einer Seite Partialbruchzerlegung zur Integration durch.*)

Aufgabe H15.17 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ für die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{\pi} \quad \text{für } -\pi \leq x < \pi \quad \text{und} \quad f(x + 2n\pi) = f(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe H15.18 (14 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf die Existenz von lokalen Extremstellen. Entscheiden Sie im Fall der Existenz, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

- (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$
- (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Hinweis: Nutzen Sie zur Selbstkontrolle die nachfolgenden Höhenlinienbilder der Funktionen. Die Art der lokalen Extremwerte bzw. das Vorliegen eines Sattelpunktes sind aber in jedem Fall rechnerisch zu begründen, eine Argumentation mit den Höhenlinienbildern ist nicht ausreichend!

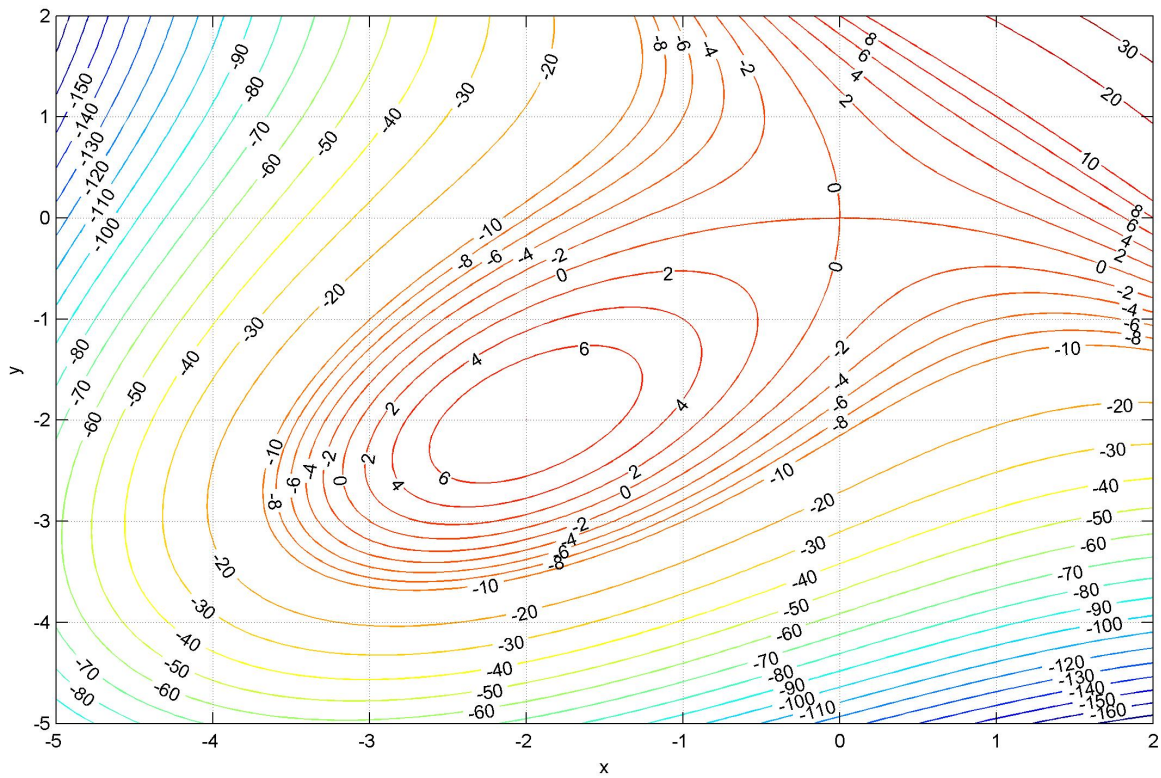


Abb. 1: Höhenlinien zur Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ aus Aufgabe H15.18 (a).

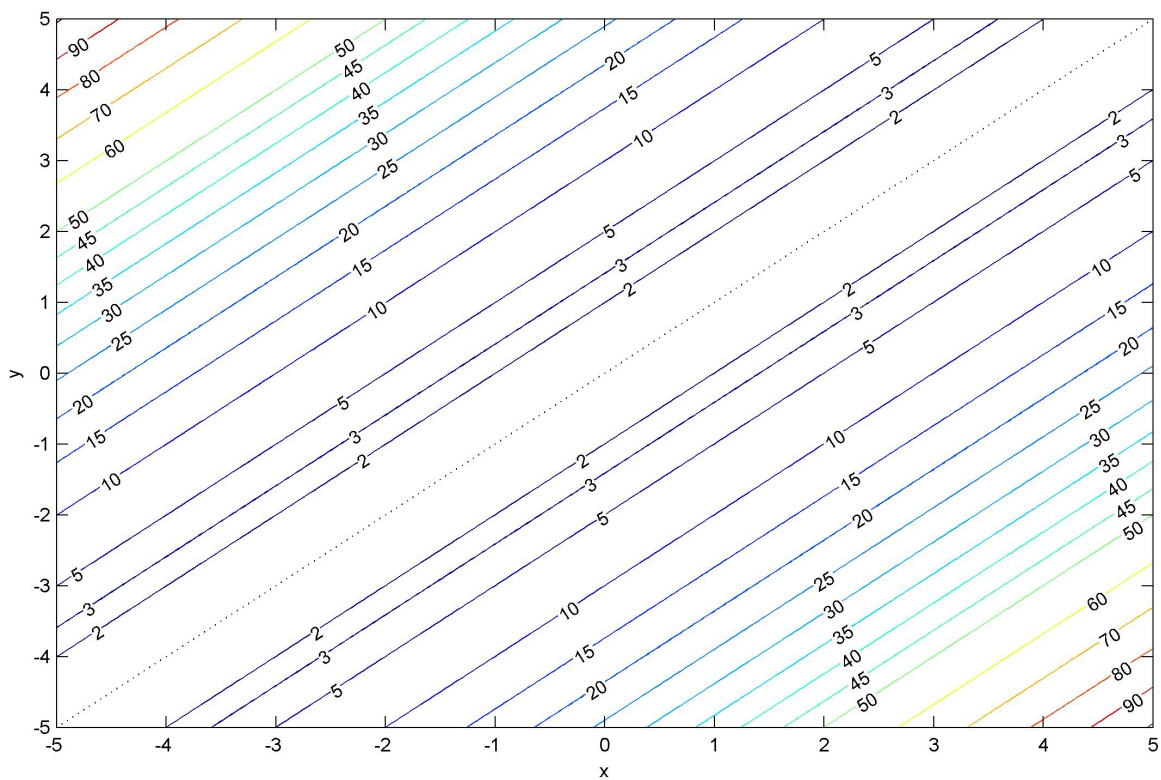


Abb. 2: Höhenlinien zur Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ aus Aufgabe H15.18 (b).

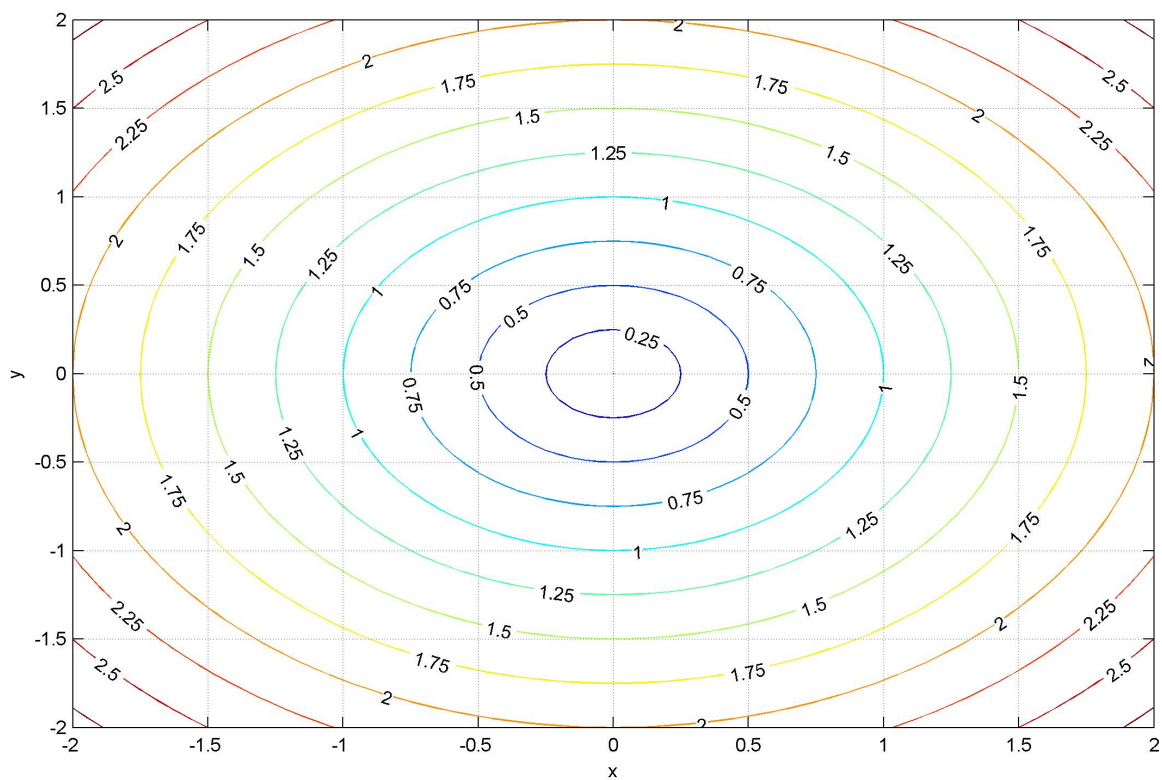


Abb. 3: Höhenlinien zur Funktion $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ aus Aufgabe H15.18 (c).