**BTU Cottbus-Senftenberg, Lehrstuhl Numerische und Angewandete Mathematik**

**Mathematik IT-3 für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/16**

# Aufgaben zum Tutorium am 19.10.2015

## Teil I: Grundlagen

Wir empfehlen allen Teilnehmern des Kurses, die Schwierigkeiten mit den hier vorausgesetzten grundlegenden Mathekenntnissen aus der Schulzeit haben, die in diesem Teil zusammengestellten Aufgaben zur Wiederauffrischung / Festigung der Grundfertigkeiten zu bearbeiten. Im Tutorium nicht gelöste Aufgaben können und sollen zu Hause durchgerechnet werden.

**Aufgabe T1.1**

Berechnen Sie *ohne* Taschenrechner:

(a) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2}+\frac{1-\frac{3}{5}}{2}\right)$

(b) $\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1-\frac{1}{5}}}}$

(c) $\cfrac{5}{4+\cfrac{3}{3-\cfrac{2}{2+\frac{1}{2}}}}$

(d) $\sum_{n=1}^{5}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

(e) $\prod_{n=1}^{5}\frac{n}{n+1}$

(f) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[6]{\sqrt[2]{3^{72}}}}$

**Aufgabe T1.2**

Vereinfachen Sie (z.B. durch Anwendung der Potenzgesetze, durch kürzen von Brüchen usw.):

(a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$

(b) $\frac{9a^2-16b^2}{9a^2+24ab+16b^2}$

(c) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+2}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$

(d) $\frac{\left(6ab\right)^3\cdot\left(5a^2b\right)^4}{2^4\cdot 3ab^2\left(25a\sqrt{b}\right)^2}$

## Teil II: Wiederholung und Vertiefung

In diesem Aufgabenteil werden wir Aufgaben anbieten, die zur Vertiefung und Festigung des aktuell in den Übungen und Hausaufgaben besprochenen Stoffes genutzt werden können. Hin und wieder wird (wie auch bei den Hausaufgaben) zur Lösung der Aufgaben Wissen aus der Vorlesung benötigt, auf das in der Übung aus Zeitgründen nicht im Detail eingegangen wurde/wird. Im Tutorium nicht gelöste Aufgaben können und sollen zu Hause durchgerechnet werden.

**Aufgabe T1.3**
Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

(b) $n^3 < 2^n$ für alle $n \geq 10$

(c) $a_n := 5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$ für $n \geq 2$.

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

**Aufgabe T1.4**

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes: Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1 + x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder reellen Zahl $a > 1$ eine natürliche Zahl $n_0$ existiert, so dass $a^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

(c) Zeigen Sie folgende Behauptung: Für jede reelle Zahl $q > 0$ gilt $q + \frac{1}{q} \geq 2$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $q = 1$ ist.

## Teil III: Ergänzungen

In diesem Teil finden sich (ggf. nicht zu allen Terminen) Aufgaben für besonders interessierte Studierende. Die Bearbeitung der einen oder anderen Aufgabe in diesem Teil kann gelegentlich etwas aufwändiger werden, einerseits wegen eines deutlich erhöhten Verständnis- und/oder Rechenaufwandes, andererseits wegen eines höheren Schwierigkeitsgrades gegenüber den Aufgaben aus den Übungen und Hausaufgaben. Wir möchten trotzdem alle Teilnehmer dieses Kurses ausdrücklich ermuntern, sich hin und wieder auch mit diesem dritten Teil auseinanderzusetzen.

**Aufgabe T1.5**
Beweisen Sie folgende Behauptungen:

(a) Zu je zwei reellen Zahlen $x, y$ mit $x < y$ existiert eine rationale Zahl $q$ mit $x < q < r$.

(b) Zu je zwei reellen Zahlen $x, y$ mit $x < y$ existiert eine irrationale Zahl $p$ mit $x < p < r$.