

Aufgaben zum Tutorium am 26.10.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T2.1

Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^4-y^4}$

(b) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2} - \frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2} - \frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

(c) $\frac{x|x-3|}{(x^2-x-6)|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 3\}$

(d) $\frac{x^{-47}b^5y^{-1}z^{-3}}{a^{-4}c^{-9}} : \frac{x^{-50}b^3y^{-2}}{a^{-3}z^7c^{-8}}$

Aufgabe T2.2

Formen Sie die folgenden Brüche so um, dass ihre Nenner ganzzahlig werden:

(a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

(b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

(c) $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}$

(d) $\frac{2}{7-\sqrt{15}}$

(e) $\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}$

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T2.3

Bestimmen Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen, falls diese existieren:

(a) $M_1 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 5x - x^2 \geq 0 \right\}$

(b) $M_2 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1}{2} \right\}$

(c) $M_3 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -6x^2 + 13x < 6 \right\}$

(d) $M_4 := \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = 1 + x \cdot |x|, -1 < x \leq 2 \right\}$

(e) $M_5 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+3} < 2x \right\}$

(f) $M_6 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |1 - |2 - |x|| = 1 \right\}$

Aufgabe T2.4

Seien $a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen mit $a_i \geq -1$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_i \cdot a_j \geq 0$ für alle $i, j = 1, 2, \dots, n$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Ungleichung erhält man für $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bzw. wie heißt diese Ungleichung?

Aufgabe T2.5

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gilt: $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$.
- (b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
- (c) Aus $ab > 1$ und $a < 1$ folgt stets $b > 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
- (d) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\max(a, b) = -\min(-a, -b)$