

Aufgaben zum Tutorium am 02.11.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T3.1

Vereinfachen Sie:

- (a) $\sqrt{6x^2 - 6} \cdot \sqrt{\frac{3x - 3}{2x + 2}}$
- (b) $\frac{\sqrt{(a - b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}}$
- (c) $\sqrt{12x^2 - 12x} \cdot \sqrt{3x^2 - 3}$
- (d) $\frac{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^4}} : \frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[9]{a^7}}{\sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt{a}}$

Aufgabe T3.2

Stellen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen jeweils nach x bzw. n um:

- (a) $x^2 = n^3 + 1$
- (b) $x^2 < n^3 + 1$
- (c) $\sqrt{x + 2} = \sqrt[4]{n^3 + 1}$
- (d) $\sqrt{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{1 + \sqrt[3]{n^2}}$
- (e) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} - 3n$

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T3.3

Ist die folgende Aussage richtig? „Eine Folge ist genau dann eine Nullfolge, wenn ihre Glieder immer kleiner werden.“ Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe T3.4

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n^2 - 1}{(n + 1)!}$ für $n \geq 2$ streng monoton fallend ist.
- (b) Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n \cdot \frac{n + 1}{2n + 1}$ beschränkt ist, und geben Sie eine Schranke für die Folge an. Geben Sie außerdem Infimum und Supremum der Menge $Z = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ an. (Hinweis: Fallunterscheidung $n \in \mathbb{N}$ gerade/ungerade.)
- (c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^2 + 3}{(n + 1)^2}$$

auf Monotonie und Beschränktheit. Falls die Folge konvergiert, dann geben Sie ihren Grenzwert an.

Aufgabe T3.5

Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge die folgenden Behauptungen:

(a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 2n - 1}$ hat den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n!}{2^{n^2}}$ hat den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(n+1)! < 2^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{4n^2 - n} \neq \frac{3}{2}$

Teil III: Ergänzungen

Aufgabe T3.6

(a) Zeigen Sie, dass die Menge A aller reellen Zahlenfolgen ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist, wobei Addition und Multiplikation komponentenweise definiert sind.

(b) Weisen Sie nach, dass die Menge B aller beschränkten reellen Zahlenfolgen ein Vektorraum ist.